INSEEC

# MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

## Exercice 1

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.
Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a lamême probabilitéde s'arrèter devant ce repère.
A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrète devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.
Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gange à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note $p_n$ la probabilité de l'événement $A_n$ : " le joueur gagne la $n^{ième}$ partie".
   (a) Calculer les probabilité conditionnelles $p\left(A_{n+1}/A_n\right)$ et $p\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right)$, en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$$
   (b) En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de $n$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$
2. Soit $k \in [[1; n]]$, on note $B_k$ l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des $n$ premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie"
   (a) A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $p\left(B_n\right)$
   (b) Soit $k \in [[1; n-1]]$, calculer $p\left(B_k\right)$
   (c) En déduire la probabilté $q_n$ pour que le joueur gagne une seule fois au cours des $n$ premières parties.

## Exercice 2

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est $A$, dans la base canonique $b = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le noyeau et l'image de $\varphi$. En déduire que 0 est valeur proprede $\varphi$.
2. (a) Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable.
   (b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de $\varphi$ et déterminer les sous espaces propres associés.

(c) On pose $u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_1 - e_2 + e_3$; montrer que $b' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $A'$ de $\varphi$ dans cette base.

3. Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois nombres réels non nuls et $P$ la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

   (a) Montrer en utilisant la question précédente que $P$ est inversible.

   (b) On rapelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j})$, on appelle transposée de $A$, la matrice notée ${}^tA$ défnie par ${}^tA = (a_{j,i})$, c'est à dire obtenue en permutant les lignes et les colonnes de $A$, ainsi ${}^tP = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ \beta & \beta & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.
   calculer le produit $P \cdot^t P$ et en déduire l'existence de valeurs de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ telles que ${}^tP = P^{-1}$
   On se placera dans cette situtation dans la suite de l'exercice.

   (c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot^t P$

4. Soient $x$, $y$ et $z$ trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et ${}^tX = (x, y, z)$
   et on pose $g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz$

   (a) Montrer que : ${}^tX \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$

   (b) Montrer que la transposée de la matrice $\left({}^tP \cdot X\right)$ est $\left({}^tX \cdot P\right)$
   On pose ${}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ; en déduire que : $g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2$

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , $f(x, y) = g\left(x, y, y^2\right)$

   (a) Expliciter $f(x, y)$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ .

   (b) Déterminer les extremums éventueles de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (c) Montrer en utilisant la question **4)** que $(0, 0)$ est un minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (d) Montrer que $f$ présente un minimum local en $(-2, 2)$ .

   (e) Des développments limités à l'ordre 2 en 0 de $h \to f\left(-\dfrac{1}{2} + h, 1 + h\right)$ et
   $h \to f\left(-\dfrac{1}{2} + h, 1 - h\right)$ , déduire que $f$ ne présente pas un extremeum local en $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$

## Exercice 3

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\times$ $f(x) = e^{-1/x^2}$

   (a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $f$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ .

   (c) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\times$ et justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (d) Achever l'étude des variations de $f$, dresser son tableau de variations, construire sa courbe représentative ainsi que la tangente à cette courbe à l'origine.

2. Etude d'une suite.

   Soit $u$ la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]0,1\right[.$

   (b) Soit $g$ la fonction défnie sur $[0,1]$ par $g\left(x\right) = f\left(x\right) - x$, calculer $g''\left(x\right).$

   Montrer que $g$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

   (On admettra que$f'\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \simeq 0,82$).

   (c) En déduire que la suite $u$ est strictement décroissante et converge. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   On se propose de démontrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que $f$ est de classe $C^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^{\times}$

   (b) On définit pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction polynôme $P_n$, par :

   $\forall x \in \mathbb{R},\ P_1\left(x\right) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ P_{n+1}\left(x\right) = x^3 P_n'\left(x\right) + \left(2 - 3nx^2\right) P_n\left(x\right).$

   Calculer $P_2\left(x\right)$ et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^{\times},\ \ f''\left(x\right) = \dfrac{P_2\left(x\right)}{x^6} f\left(x\right)$

   Montrer par récurrence sur $n$ , $n \in \mathbb{N}^{\times}$, que : $\forall x \in \mathbb{R}^{\times}\ f^{(n)}\left(x\right) = \dfrac{P_n\left(x\right)}{x^{3n}} f\left(x\right).$

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ P_n\left(0\right) = 2^n$

   (d) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0}\ f^{(n)}\left(x\right) = 0$

   (e) Montrer par récurrence qur $n \in \mathbb{N}^{\times}$, que $f$ est de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$.

   En déduire que $f$ est de classe $C^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.