INSEEC
MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option technologique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Partie A :

Soit la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère du plan.
On donne $\frac{1}{e} = 0,37$.

1. (a) Etudier les limites de f en $(-\infty)$ et $(+\infty)$.
   (b) Etudier les branches infinies de f; préciser les asymptotes éventuelles.
2. (a) Etudier le sens de variation de f.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
   (b) Construire (C) et (T).
4. On désigne par $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
   On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout n entier $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
   En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer qu'il existe trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) telles que

$$f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$$

   On précisera a_0, b_0, c_0 et on exprimera $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.

Partie B :

On considère les matrices carrées d'ordre 3 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = I + B.$$

1. Calculer B^2, B^3. Préciser B^k pour $k \geqslant 3$.
2. (a) Montrer que A est inversible.
   (b) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, calculer l'inverse A^{-1} de A.

3. (a) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

   (b) Expliciter les neufs termes de A^n.

4. Pour tout entier n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

   (a_n), (b_n) et (c_n) sont les trois suites définies dans la **partie A** question 4.

   (a) Vérifier que pour tout n positif, $X_{n+1} = -A.X_n$.

   (b) En raisonnant par récurrence, établir que pour tout entier n on a : $X_n = (-1)^n A^n.X_0$.

   (c) Donner alors les valeurs de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère deux pièces de monnaie truquées M_1 et M_2.
Lorsqu'on lance la pièce M_1 , la probabilité d'avoir face est égale à $\frac{1}{3}$ et lorsqu'on lance la pièce M_2 , la probabilité d'avoir face est égale à $\frac{2}{9}$.
On effectue une succession de parties de la façon suivante :

- A la première partie, on prend une des deux pièces au hasard et on lance cette pièce ;
  si le résultat est face, on joue la deuxième partie avec M_1, sinon on joue avec M_2.

- Pour tout entier$n \geqslant 1$, on joue la $(n+1)^{ième}$ partie avec M_1 si on a obtenu face à la $n^{ième}$ partie ;
  on joue la $(n+1)^{ième}$ partie avec M_2 si on a obtenu pile à la $n^{ième}$ partie.

On note U_n la probabilité d'avoir face à la $n^{ième}$ partie.

1. En utilisant la formule des probabilités totales :

   (a) Calculer les valeurs de U_1 et U_2.

   (b) Etablir que pour tout $n \geqslant 1$: $U_{n+1} = \frac{1}{9}U_n + \frac{2}{9}$.

2. Calculer U_n en fonction de n.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note X_n la variable aléatoire associée à la $n^{ième}$ partie qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{ième}$ partie est face et 0 sinon.

   (a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances mathématiques.

   (b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? (justifier la réponse).