ISC 1981

EXERCICE I

Dans une urne, il y a dix boules numérotées de 0 à 9

1. On tire simultanément deux boules de cette urne. On suppose tous les tirages équiprobables et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le plus petit des deux nombres portés par les deux boules
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X
2. On tire maintenant une boule de l'urne contenant les dix boules numérotées de 0 à 9 et on appelle Y la variable aléatoire qui associe à chaque nombre porté par la boule tirée le reste de sa division par 2, de même on appelle Z la variable aléatoire qui associe à chaque nombre porté par la boule tirée le reste de sa division par 3.
   (a) En supposant l'équiprobabilité des tirages d'une boule construire le tableau de la loi conjointe du couple (Y, Z).
   Indiquer sur ce tableau les marginales.
   (b) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
   (c) Calculer la covariance du couple (Y, Z)
   N.B : On rappelle que si $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ $(k \in \mathbb{N})$
   $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $S_3 = (S_1)^3$

EXERCICE II

A. On considère l'ensemble $\mathfrak{M}_2$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
Soit M une matrice de $\mathfrak{M}_2$ vérifiant les conditions suivantes

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad M \neq kI \quad \text{et} \quad M^2 + 6M = 6I \quad I \text{ matrice unité de } \mathfrak{M}_2$$

   (1) Déterminer les matrices de $\mathfrak{M}_2$ combinaisons linéaires de M et de I qui sont égales à leur carré
   (2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces matrices, donner la table de multiplication de $\mathcal{A}$
   (3) Quelles sont les matrices de $\mathcal{A}$ qui sont inversibles ?

B. On considère l'ensemble $\mathfrak{M}_3$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Soit M un élément de $\mathfrak{M}_3$ vérifiant la propriété "P" suivante :

$$\text{"}P\text{" : " } \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists c \in \mathbb{R}^\times \text{ tel que } aM^2 + bM = -cI \text{ "}$$

I étant la matrice unité de $\mathfrak{M}_3$

   (1) Montrer que M est une matrice inversible.
   (2) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
      a. Montrer que M vérifie la propriété "P"
      b. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}^\times$. Exprimer M^n en fonction de n, I et J.
      c. Donner l'expression de M^n sous forme d'une matrice.

PROBLEME

Les parties de ce problème sont largement indépendantes

Partie A

A. (1) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ p + q = m \end{cases}$$

(2) Déterminer p et q solution du système dans le cas où $m = \dfrac{9}{2}$ et $p < q$

B. Soit la fonction numérique h_p définie sur $[0, +\infty[$ telle que

$$u \mapsto h_p(u) = \frac{u^p}{p} - uv,$$

où $v \geqslant 0$.

(1) Etudier les variations de h_p pour la valeur de p trouvée dans A2

(2) Etudier les variations de h_p pour $p \in]1, +\infty[$

(3) En déduire que

$$\forall u \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0, \quad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ et si } p > 1$$

Partie B

A. Soit f la fonction numérique définie sur $[0, a]$ telle que :

$$x \mapsto f(x) = x^2 + 2x$$

(1) Montrer que f est une application bijective et définir g l'application réciproque de f.

(2) On considère la fonction F définie sur $[0, a]$ telle que

$$x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

Etudier les variations de F.

B. Soit f une fonction numérique continue dérivable positive et strictement croissante sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$
On désigne par g la réciproque de f.
On considère la fonction F définie sur $[0, a]$ telle que

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

(1) Montrer que F est dérivable et calculer $F'(x)$.

(2) Montrer que si $0 \leqslant u \leqslant a$ et $0 \leqslant v \leqslant f(a)$ alors

$$uv \leqslant \int_0^v f(t)dt + \int_0^v g(t)dt$$

(3) En utilisant ce résultat, retrouver le résultat

$$\forall u \geqslant 0, \quad \forall v \geqslant 0, \quad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ et si } p > 1$$

Partie C

A. Soit h une fonction numérique et continue sur $\mathbb{R}$

(1) Comparer $\int_a^b h(x)dx$ et $\int_a^b h(a+b-x)dx$

(2) En déduire $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx$

(3) Etabir que $\int_0^{2a} h(x)dx = \int_0^a [h(x)+h(2a-x)]\,dx$

B. On considère deux fonctions f et g définies et continues sur $[a,b]$.
On suppose f croissante et que g et $1-g$ soient strictement positives.
On pose $\ell = \int_a^b g(t)dt$

(1) Etudier les variations de la fonction G définie par :

$$x \mapsto G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

(2) Montrer que $\forall x \in [a,b], \quad a + G(x) \leqslant x$

(3) Comparer les fonction φ et ψ définies par :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)dt$$

En déduire que $\int_a^b f(t)g(t)dt \geqslant \int_a^{a+\ell} f(t)dt$.