ISC 1983 Option économique

EXERCICE 1

Une société fabrique et vend deux produis X et Y dont les prix de ventes respectifs sont 27 F et 23 F par unité. Les prévisions de ventes mensuelles sont de 1050 unités de X et de 650 unités de Y au maximum.
La fabrication est assurée sur 3 types de machines successifs M_1, M_2, M_3 : le temps d'occupation de chaque machine par unité de produit étant donné par le tableau suivant :

	X	Y
M_1	19	31
M_2	5	4
M_3	5	23

en heures

Le temps total disponible mensuel par type de machin est

Pour M_1 = 29 450 heures
Pour M_2 = 6 000 heures
Pour M_3 =16 100 heures

On demande

1. La mise en forme du problème
2. Déterminer le programme de fabrication rendant maximal le chiffre d'affaire. En particulier
   - donner ce chiffre maximal au franc près
   - indiquer la charge des différentes machines
   - indiquer les quantités fabriquées des deux produits

EXERCICE 2

On considère les deux séries statistiques semestrielles suivantes :
x = solde des mouvements de capitaux à long terme
y = solde hors emprunts extérieurs et hors opération exceptionnelles

	x	y
Janvier 1974	1 000	-2 000
Juillet 1974	4 000	-1 000
Janvier 1975	1 000	-2 000
Juillet 1975	-1 000	-5 000
Janvier 1976	-3 000	-7 000
Juillet 1976	-2 000	-8 000
Janvier 1977	0	-6 000
Juillet 1977	0	-5 000
Janvier 1978	-2 000	-10 000
Juillet 1978	1 000	-3 000
Janvier 1979	-5 000	-6 000
Juillet 1979	-5 000	-8 000
Janvier 1980	-2 000	-6 000

(Source Insee)

On demande de calculer, en justifiant clairement la méthode choisie,

1. La meilleure valeur des x possibles pour y = -6 500
2. La meilleure valeur des y possibles pour x = - 6 000
3. Une prévision sur x en janvier 1982
4. Le coefficient de corrélation linéaire entre x et y

PROBLEME

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = \cos x + x \sin x$$

1. (a) Etudier les variations de l'application f. Montrer qu'il suffit de faire l'étude de f dans $\mathbb{R}_+$.
   Dresser le tableau de variations pour $x \in [0, 2\pi]$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [2n\pi, (2n+2)\pi]$

   (b) Tracer le graphe (Γ) de f dans un repère orthonormé.
   On prendre $x \in [-\pi, 5\pi]$.

2. Montrer que si on pose x_0, x_1, $x_2, ...$ les abscisses rangées ($x_0 < x_1 < x_2 < ...$) des points de (Γ) où la tangente est parallèle à Ox, la suite (x_i), $i \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique dont on demande le premier terme et la raison.
   Donner la valeur de x_n ainsi que celle de $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$

3. On pose $y_n = f(x_n)$ (voir la question 2).
   Calculer en fonction de n les valeurs de y_n et de $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i$.

4. Etudier la concavité de (Γ). En déduire les points d'inflexions de (Γ) se trouvent sur une courbe simple que l'on déterminera.
   Etudier, pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre de points d'inflexion de (Γ) situés dans les intervalles $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ et $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$

5. Soit $\varphi(x) = \dfrac{1}{\lambda}.f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

   - Déterminer λ pour que $\varphi(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue réelle variant entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
   - Donner l'expression et faire le graphe de la fonction de répartition de cette variable aléatoire X.
   - Calculer la probabilité de l'évènement $(\dfrac{\pi}{4} < X < \dfrac{\pi}{3})$ puis de l'évènement $(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{\pi}{3})$
   - Calculer la probabilité de l'évènement $(X < \dfrac{\pi}{6})$ sachant que $(X < \dfrac{\pi}{4})$.
   - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

6. On considère la variable aléatoire continue réelle Y définie par $Y = X - \dfrac{\pi}{4}$. On demande :

   (a) la fonction de répartition de Y

   (b) la densité de probabilité de Y

   (c) L'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$.

FIN