ISC 1983 Option générale et technologique

EXERCICE 1

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(r) = 0 & \text{si} \quad r \leqslant 0 \\ f(r) = \lambda^2 r e^{-\lambda r} & \text{si} \quad r > 0 \end{array} \right. \end{array}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Construire le graphe de $f(r)$.
3. Calculer $F(s) = \int_0^s f(r)dr$.
4. Calculer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_s^t \frac{f(r)}{r} dr$.
5. On considère la fonction
$$L(s) = F(s) + s \int_s^{+\infty} \frac{f(r)}{r} dr.$$
Etudier la continuité et la dérivabilité de $L(s)$, $s \in \mathbb{R}_+^\times$. Construire le graphe de $L(s)$.
6. Résoudre l'équation $L(s) = \rho$.
Application numérique : $\lambda = 3.10^{-5}$, $\rho = 0,8$

EXERCICE 2

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{\lambda x + 1}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

1. Etudier les points à l'infini du graphe de f. En particulier, dans le cas d'asymptote, on précisera la place du graphe par rapport à l'asymptote.
2. Etudier les variations de f.
3. Représenter clairement les différentes formes du graphe de f.

PROBLEME

Le problème comprend deux parties largement indépendantes

Partie I

On considère la matrice à termes réels

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \quad p \neq 1, \quad q \neq 1, \quad p+q \neq 2$$

1. Trouver une relation entre P^2, P et I (matrice unité 2×2). En déduire qu'il existe des scalaires a_n et b_n tels que :

$$P^n = a_n P + b_n I$$

Ecrire les relations de récurrence qui déterminent a_n et b_n.

2. Exprimer a_n, b_n et P^n en fonction de n.
Comment doit-on choisir p et q pour que $P^2 = P$?

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de P. Peut-on former une base de vecteurs propres ?

4. Soit A une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de P. Montrer qu'elle est régulière et calculer son inverse A^{-1}.
Effectuer le calcul $A^{-1}PA$..
En déduire l'expression de P^n en fonction de n.
Quels sont les vecteurs propres et les valeurs propres de P^n ?

5. Dans le cas où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, en déduire la limite de P^n quand n augmente indéfiniment.

Partie II

On considère une suire d'épreuves répétées, chacune admettant deux résultats possibles seulement : R_1 et R_2.
On supposera que le résultat d'une épreuve dépend de celui de l'épreuve précédente.
On note p la probabilité d'obtenir R_1 à une épreuve, après qu'il se soit réalisé à l'épreuve précédente, q la probabilité d'obtenir R_2 à une épreuve après qu'il se soit réalisé à l'épreuve précédente.
On suppose que p et q sont indépendants du rang de l'épreuve.
On note a_1 et b_1 le probabilité respectives d'obtention de R_1 et R_2 à la première épreuve.

1. Calculer les probabilités des évènements

   - Avoir R_1 a une épreuve, R_2 ayant été réalisé à l'épreuve précédente.
   - Avoir R_2 a une épreuve, R_1 ayant été réalisé à l'épreuve précédente
   - Obtenir R_1 à la deuxième épreuve (notée a_2)
   - Obenir R_2 à la deuxième épreuve (notée b_2)

   Trouver la matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

2. On note $P_{i,j}^{(2)}$ la probabilité de l'évènement

   "avoir R_j a une épreuve, R_i ayant été réalisé 2 épreuves avant"
   (ou encore "passage" de R_i à R_j en 2 épreuves)
   $i \in \{1, 2\}, \quad j \in \{1, 2\}$.

   Que peut-on dire de la matrice

$$\begin{pmatrix} P_{1,1}^{(2)} & P_{2,1}^{(2)} \\ P_{1,2}^{(2)} & P_{2,2}^{(2)} \end{pmatrix} \ ?$$

3. Déduire de la première partie les probabilités des évènements

   "avoir R_i à une épreuve, R_i ayant été réalisé n épreuves avant"

   Calculer les probabilités respectives a_n et b_n de R_1 et R_2 à la $n^{ième}$ épreuve.
   Ont-elles une limite quand le nombre d'épreuves augmente indéfiniment ?

FIN