ISC 1986 Option générale

EXERCICE 1

On considère n urnes numérotées de 1 à n et on suppose que pour tout nombre k compris entre 1 et n, l'urne numéro k contient k boules numérotés de 1 à k.
On choisit au hasard une urne parmi les n et, dans cette urne, on tire au hasard une boule. On note X_n le numéro aléatoire de l'urne choisie et N_n le numéro aléatoire de la boule choisie.

1. Dans cette question, on suppose que l'on a $n = 3$.

   (a) Déterminer la loi du couple (X_2, N_2). (On présentera les résultats sous forme de tableau à double entrée)

   (b) Déterminer la loi de N_3 ainsi que son espérance et sa variance.

   (c) X_3 et N_3 sont-elles indépendantes ? Calculer leur coefficient de corrélation.

2. Dans cette question, on suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   (a) Montrer que N prend ses valeurs entre 1 et n et que l'on a :

   $$\forall k \in \{1, 2, ..n\}, \qquad P(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

   où $P(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A.

   (b) En transformant les sommations rencontrées, calculer l'espérance et la variance de N_n.

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3. Pour $A \in \mathcal{M}$, on note $a_{i,j}$ l'élément de A situé à l'intersection de sa $i^{ième}$ ligne et de sa $j^{ième}$ colonne.

- Une matrice A de $\mathcal{M}$ est dite "symétrique" si :

  $$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad a_{i,j} = a_{j,i}$$

- Une matrice A de $\mathcal{M}$ est dite "antisymétrique" si :

  $$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad a_{i,j} = -a_{j,i}$$

- Une matrice A de $\mathcal{M}$ est dite "magique" si les six nombres

  $$\sum_{k=1}^{3} a_{1,k}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{k,1}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{k,2}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{k,3}$$

  sont égaux. La valeur commune de ces six sommes sera alors notée $s(A)$ et appelée la "somme" de A.
  Enfin J désigne la matrice de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}$ est magique de somme $s(A)$ si et seulement si l'on a : $AJ = JA = s(A)J$

2. Montrer que l'ensemble E des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et que le produit de deux matrices magiques est encore magique.

3. Quelles sont les propriétés de l'application s, définie sur E, qui à A associe $s(A)$?

4. Soit E_0 l'ensemble des matrices magiques de somme nulle.

   (a) Quelle est la relation liant la dimension de E et celle de E_a ?

   (b) Déterminer les matrices symétriques appartenant à E_0 et les matrices antisymétriques appartenant à E_0.

PROBLEME

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application φ qui à toute fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

F étant définie pour les valeurs de x telles que l'intégrale précédente ait un sens.
Nous attirons l'attention sur le fait que dans l'intégrale précédente, t est la variable d'intégration, x jouant le rôle de paramètre réel).

1. Expliciter F, en précisant à chaque fois son domaine de définition, dans les cas suivants :

   α) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = 1$

   β) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = e^t$

   γ) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = t^3$

2. On désigne par L l'ensemble des fonctions f définies positives et continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall m \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \to +\infty} e^{-mt} f(t) = 0$$

   (a) Montrer que la somme de deux éléments de L appartient à L et que L contient les fontions $t \mapsto t^n$ pour $n \in \mathbb{N}^\times$.

   (b) Soit $f \in L$ et $x \in \mathbb{R}_+^\times$.

      i. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = e^{-\frac{\pi}{2}t} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$
      On note M un majorant de g sur $\mathbb{R}_+$.

      ii. En déduire l'existence de l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$.

   (c) Soit $f \in L$, $F = \varphi(f)$ la fonction associée à f. Montrer que l'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$$

3. (a) Montrer que l'on a :

      i. $\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad e^u - 1 - u - \dfrac{u^2}{2} e^u \leqslant 0.$

      ii. $\forall u \in]-\infty, 0], \quad e^u - 1 - u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant 0$

   (b) Déduire de la question précédente que l'on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad e^u - 1 - u \leqslant \frac{u^2}{2} e^{|u|}$$

   (c) Soit $f \in L$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ appartient encore à L.

(d) Soit $f \in L$, $F = \varphi(f)$ la fonction associée à f et $x \in \mathbb{R}_+^\times$. Démontrer que l'on a pour tout nombre réel h tel que $|h| < \dfrac{x}{2}$:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-\frac{\pi}{2} t}.$$

(on posera $u = ht$)

(e) En déduire que si $f \in L$, $F = \varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et exprimer $F'(x)$ pour $x > 0$, à l'aide d'une intégrale.

Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$.