ISC 1986 Option technologique

EXERCICE 1

(*Les données et le scénario sont fictifs*)
Dans une entreprise, la répartition des salaires mensuels est la suivante :

Salaires	effectifs en %
[5000, 6000[	21
]6000,7500]	29
]7500,9000]	27
]9000,10000]	3
]10000,11000]	17
]11000,23000]	3

(Ce tableau signifie par exemple que 27 % des salariés ont un salaire strictement supérieur à 7500 F mais inférieur ou égal à 9000 F)

1. Représenter l'histogramme de cette série statistique (1 cm en abscisse représentant 1000 F). Calculer sa moyenne arithmétique et son écart-type.
2. Construire la courbe de concentration (ou courbe de Gini) de cette série statistique et calculer son indice de concentration (ou indice de Gini)
(1 cm en abscisse ou en ordonnée représentant 10 %. Les calculs nécessaires seront faits avec 4 chiffres significatifs et on construira la courbe et l'histogramme sur la même feuille)
3. Le chef de cette entreprise décide d'augmenter tous les salariés de 1000 F par mois.
   (a) Quel est l'écart-type de la série statistique après augmentation ?
   (b) Quel est l'indice de Gini de la série statistique des salaires après augmentation ? Conclusion ?

EXERCICE 2

Trois joueurs A,B,C jouent une succession de parties équitables et indépendantes, selon le protocole suivant :

- Tant qu'il n'y a pas de joueur déclaré vainqueur, deux joueurs s'affrontent et le perdant est remplacé par le joueur qui attend pour la partie suivante.
- Est déclaré vainqueur le premier joueur qui gagne deux parties consécutives.
- A et B jouent la première partie.

On note A_n l'évènement "A gagne à l'issue de la $n^{ième}$ partie" et on définit de même les évènements B_n et C_n.

1. Tracer l'arbre des possibilités jusqu'à la $4^{ième}$ partie.
2. Quelle est la probabilité que A soit déclaré vainqueur à l'issue de la $2^{ième}$ partie ? de la $3^{ième}$? de la $4^{ième}$ partie ? de la $5^{ième}$?
3. Quelle est la probabilité que A soit déclaré vainqueur ? Que B soit déclaré vainqueur ?
4. Quelle est la probabilité que C soit déclaré vainqueur ?
5. Soit X le nombre aléatoire de parties jouées jusqu'à l'obtention d'un vainqueur. Quelle est la loi de X ?

EXERCICE 3

Soit λ un paramètre réel. On considère la fonction f_λ définie par :

$$f_\lambda(x) = x^\lambda e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

1. Quel est le domaine de définition de f_λ ? Peut-on prolonger f_λ par continuité ?
2. Etudier, en fonction des valeurs du paramètre λ, les variations de f_λ et indiquer sur un même graphique les différentes formes de courbes obtenues.
3. Pour quelles valeurs de λ, la représentation graphique de f_λ admet-elle au moins un point d'inflexion ? (On ne demande pas de déterminer ces éventuels points d'inflexion).

EXERCICE 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par son premier terme $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

(où ln désigne la fonction logarithme népérien)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est décroissante et minorée par 0.
   Déterminer la limite de cette suite.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a :
$$u_n > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   Montrer que $S_{2n} - S_n$ ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers l'infini.
   Que peut-on en déduire pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$?
4. Montrer que pour $x \geqslant 1$, on a $\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right) < \dfrac{3}{x+1}$. En déduire que l'on a :
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n < \frac{3}{n+1}.$$
   Que peut-on dire de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par $T_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$?
   (On pourra montrer que $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$)