ISC 1987 Option économique et technologique

EXERCICE 1

On a relevé à la fin de chaque mois de l'année 1986 le cours du dollar dans trois grandes places financières

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Dollar Paris	7,60	7,30	6,90	7,50	7,00	7,40	6,95	6,80	6,50	6,75	6,40	6,60
Dollar Tokyo	202	193	176	179	162	172	150	153	152	163	161	164
Dollar Francfort	2,50	2,40	2,22	2,38	2,18	2,31	2,15	2,08	1,96	2,07	1,95	2,02

(les cours à Paris sont bien entendu exprimer en Francs, à Tokyo en Yens et à Francfort en Maks, à chaque fois pour un Dollar).

1. On désire connaitre rapidement un ordre de grandeur de la corrélation entre le cours du Dollar à Paris et son cours dans chacune des deux autres villes. Pour cela :

   Pour chacune des trois places financières, on associe à chaque mois
   son rang par ordre des cours décroissants de cette place

   Quel est le coefficient de corrélation des rangs entre Paris et chacune des deux autres villes ?
   (on présentera les seuls calculs nécessaires en un unique tableau)

2. Déterminer les équations des droites de régression entre le cours du Dollar à Paris et à Francfort.

3. Certains experts penchent pour une baisse supplémentaire de 10 % du Dollar par rapport au Mark pour l'année 1987, en prenant comme référence le cours de décembre 1986.
   Quelle estimation pouvez-vous donner pour le cours du Dollar par rapport au Franc, pour cette même année 1987 ?

EXERCICE 2

On considère une urne blanche contenant deux boules vertes et une boule rouge, une urne rouge contenant une boule blanche et deux boules vertes et une urne verte contenant une boule blanche et une boule rouge.

1. On choisit une urne au hasard et on y prend une boule au hasard. On note b_1 (resp. r_1, v_1) la probabilité d'obtenir une boule blanche (resp. rouge, verte).
   Calculer b_1, r_1, v_1.

2. On replace dans l'urne choisie la boule obtenue et, à partir de maintenant, on effectue des tirages successifs d'une boule d'une urne (avec remise dans l'urne choisie) en choisissant à chaque fois une boule au hasard dans l'urne ayant une couleur de la boule obtenue la fois précédente. On note b_n (resp. r_n, v_n) la probabilité d'obtenir une boule blanche (resp. rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage, pour $n \geqslant 1$.

   (a) Déterminer des relations de récurrence liant b_n, r_n, v_n à b_{n-1}, r_{n-1}, v_{n-1}.
   (b) En déduire v_n en fonction de v_{n-1}, puis v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer alors r_n en fonction de n.
   (d) Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ sont-elles convergentes ?
   Dans l'affirmative, déterminer leurs limites.

3. On décide d'effectuer des tirages selon le protocole précédent, jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une boule rouge. On note X le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.
   Déterminer la loi de X.

EXERCICE 3

Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie par :

$$f_m(x) = \ln(2 + mx^2)$$

(où ln désigne la fonction "logarithme népérien").

1. On suppose $m < 0$. Déterminer le domaine de définition de f_m et étudier ses variations. Construire, en repère orthonormé, la représentation graphique de f_{-1}.

2. On suppose $m > 0$. Etudier les variations de f_m, préciser la nature des branches infinies et la concavité. Construire, dans le même repère que précédemment, la représentation graphique de f_2.

3. On considère l'équation $2 + mx^2 = e^{-mx}$ où x est l'inconnue. Dire combien de solutions elle possède, selon les valeurs du paramètre m. Donner les meilleures valeurs approchées à 10^{-2} près des éventuelles solutions dans le cas $m = -1$, $m = 2$, $m = 1$.

EXERCICE 4

1. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n); \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

   (a) Montrer que ces suites sont monotones et qu'elles convergent vers une même limite notée l.

   (b) Montrer que l'on a : $0,5 < l < 1$.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n)$ et en déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n+1}} + e^{\frac{1}{n+2}} + \cdots + e^{\frac{1}{n+n}} - n\right)$