ISC 1988 Option générale

EXERCICE 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^n(1-x)^n$$

1. Montrer que toutes les dérivées de f_n, jusqu'à la $(n-1)^{ième}$ incluse, sont nulles aux points 0 et 1.
2. Pour x réel, on pose
   - $L_0(x) = 1$
   - Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\quad L_p(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} f_n^{(n)}(x)$, où $f_n^{(n)}$ désigne la fonction dérivée $n^{ième}$ de f_n).

   (a) Montrer que L_n appartient à E_n et préciser son degré ainsi que les valeurs des coefficients des termes de plus haut et plus bas degré de L_n.

   (b) Déterminer L_1, L_2, L_3.
3. Soit P une fonction polynôme de degré strictement inférieur à n, montrer, à l'aide d'intégrations par partie, que l'on a :
$$\int_0^1 P(t)L_n(t)dt = 0$$
4. (a) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de :
$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx.$$
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, calculer la valeur de : $\int_0^1 f_n(x)dx$.

   (c) En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}$, de : $\int_0^1 L_n(x)L_n(x)dx$
5. Montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E_3 et déterminer la matrice de passage de la base canonique de E_3 à la base (L_0, L_1, L_2, L_3) ainsi que son inverse.

EXERCICE 2

1. Soit M un nombre réel strictement positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$u_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{M + u_n}$$
   (a) Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de M.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $1 + 2M$.

   (c) Exprimer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de M.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose :

$$v_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}} \qquad (n \text{ radicaux superposés})$$

   (a) Quel est le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

   (b) On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est majorée, montrer que dans ce cas la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est convergente.

   (c) On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ vérifie la propriétée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(a_n))}{n} < \ln 2$$

   (où ln désigne la fonction logarithme népérien)
   Montrer que, dans ce cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est convergente.

PROBLEME

Un papetier vend un produit correcteur, ce produit lui est livré en boites, chaque boite contenant un flacon de produit effaceur et un flacon de produit diluant. A la demande de sa clientèle, il accepte de vendre ces deux produits séparément. Chaque client demande soit le produit effaceur (avec la probabilité p, $p \in]0,1[$), soit le produit diluant (avec la probabilité $q = 1 - p$), les demandes des clients étant indépendantes les unes des autres

1. Un jour donné, quatre clients demandent l'un de ces produits, à l'ouverture de son magasin le papetier ne possédant pas de boite entamée)
   Soit X le nombre aléatoire de boites ouvertes ce jour par le papetier.

   (a) Déterminer la loi de X.

   (b) Calculer, en fonction de p, l'espérance de X. Pour quelle valeur de p cette espérance est-elle minimale ? Quelle est la valeur de ce minimum ?

2. On suppose dans cette question que l'on a : $p = \dfrac{1}{2}$ et que le commerçant sait que le mois suivant exactement $2n$ clients demanderont l'un des deux produits. On suppose que le premier jour le papetier ne possède pas de boite entamée et l'on note X_n le nombre aléatoire de boites que le papetier devra ouvrir au cours de ce mois.

   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X_n ? Déterminer la loi de X_n.

   (b) Calculer l'espérance de X_n.

   (c) Chaque boite entamée est facturée 20 F au papetier par son fournisseur à la fin du mois.
   On note $10(1 + x_n)$ le prix de vente de chaque flacon.
   Quelle doit être la valeur de x_n pour que le commerçant espère ne pas perdre d'argent à la fin du mois ?
   Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est décroissante.

3. Dans cette question, on suppose que le commerçant possède au départ un stock non renouvelable de n boites. Il vend des flacons jusqu'à l'épuisement de l'un des deux produits et on note Y_n le nombre aléatoire de flacons de l'autre produit restant à ce moment dans son magasin.

   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre Y_n ?

   (b) Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, calculer l'espérance de Y_n.