ISC 1988 Option économique et technologique

EXERCICE 1

Cent chefs de famille d'un même quartier ont répondu à un sondage concernant à la fois le revenu mensuel de la famille (X) et le nombre de véhicules automobiles possédés (Y). Les différentes réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

$Y \diagdown X$	$[5,7[$	$[7,10[$	$[10,15[$	$[15,25[$	$[25,40]$
0	5	4	4	0	0
1	9	12	15	3	5
2	1	8	10	12	8
3	0	1	0	1	2

(Les relevés étant exprimés en milliers de Francs, ce tableau signifie donc, par exemple, que 12 personnes gagne au moins 7 000 F par mois, mais moins de 10 000 F, déclarent posséder 1 voiture)

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) et le coefficient de corrélation entre X et Y.
2. Déterminer l'indice de concentration (aussi l'indice de Gini) de la statistique X et la médiale de X.
3. Déterminer le salaire moyen d'un chef de famille possédant au moins un véhicule automobile.

EXERCICE 2

Soit n un nombre entier naturel non nul. Une urne contient initialement n boules noires et $2n$ boules blanches. On tire des boules au hasard de cette urne, une à une et sans remise, jusqu'à ce que l'on obtienne la dernière boule. On note X_n le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

1. Dans les deux cas : $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Dans le cas général, déterminer les valeurs que peut prendre X_n, puis la loi de X_n.
3. (a) Calculer les probabilités des évènements "$X_1 \leqslant 2$", "$X_2 \leqslant 4$".
   (b) Dans le cas général, calculer la probabilité de l'évènement "$X_n \leqslant 2n$".

EXERCICE 3

1. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right),$$
   où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Etudier les variations de f.
   (c) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (l'unité sera prise égale à 3 cm).
2. Soit g la fonction définie par :
$$g(x) = x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

(a) Quel est le domaine de définition de g ? peut-on prolonger g par continuité ?
Cet éventuel prolongement est-il dérivable ?

(b) Construire la représentation graphique Γ de g dans le même repère que précédemment.

(c) Calculer l'aire de la surface limité par Γ, la droite horizontale d'ordonnée -1 et les droites verticales d'abscisses respectives 1 et α, avec $\alpha > 1$. Cette aire a-t-elle une limite lorsque α tend vers l'infini ?

EXERCICE 4

1. Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0, 1]$.
Montrer que, parmi les primitives de f, il en existe exactement une, noté F, telle que :

$$\int_0^1 F(x)dx = 0$$

Déterminer F pour f définie par : $f(x) = e^x$.

2. On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes par les conditions suivantes

- $P_0 : x \mapsto 1$
- Pour tout entier naturel n non nul, P_n est la primitive de P_{n-1} telle que $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$.

(a) Déterminer les fonctions P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

(b) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, quelle relation y-a-t-il entre $P_n(1-x)$ et $P_n(x)$?

(c) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, étudier les variations de P_n sur le segment $[0, 1]$, et en déduire le nombre de solutions appartenant à $[0, 1]$ de l'équation : $P_n(x) = 0$.

(d) Peut-on généraliser les résultats obtenus en 2b et 2c, pour tout entier naturel non nul n ?