ISC 1989 Option générale

EXERCICE 1

⊡ Les matrices considérées dans cet exercice sont toutes les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels (c'est-à-dire des éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Si $(s_{11}(n))$, $(s_{12}(n))$, $(s_{21}(n))$, $(s_{22}(n))$ sont quatre suites convergentes de limites respectives s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, on convient d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} s_{11}(n) & s_{12}(n) \\ s_{21}(n) & s_{22}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

⊡ Pour A matrice carrée d'ordre deux et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = I + \dfrac{A}{1!} + \dfrac{A^2}{2!} + \cdots + \dfrac{A^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A^k}{k!}$
où A^k désigne la $k^{ième}$ puissance de la matrice A.

1. Calculer S_n dans chacun des cas suivants

$$i) \quad A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad iv) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et, à chaque fois, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2. (a) Plus généralement, soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et M un nombre réel tel que : $\forall i, j \in \{1, 2\}, \quad |a_{i,j}| \leqslant M$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, chaque terme de A^n est majoré en valeur absolue par $2^{n-1}M^n$; en déduire que la suite (S_n) associée à la matrice A est convergente. La limite de la suite (S_n) est alors notée e^A.

   (b) A-t-on toujours $e^{A+B} = e^A.e^B$ pour $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2

On lance indéfiniment une pièce truquée amenant pile avec la probabilité p (avec $p \in]0, 1[$) et donc face avec la probabilité q ($q = 1 - p$), et on s'intéresse à la longueur des séries successives de "piles" ou de "face", en appelant **série** une succession de "pile" ou une succession de "face" interrompue par l'évènement contraire.
'par exemple, si l'on obtient PPPPFFFPPF... ou FFPFFP... on dit dans le premier cas que la $1^{ère}$ série est de longueur 4 (c'est une série de "pile"), la seconde de longueur 3 (c'est donc une série de "face"), la troisième de longueur 2, ...tandis que le second cas la $1^{ère}$ série est de longueur 2 (c'est la série de "face"), la deuxième de longueur 1, la troisième de longueur 2, ...)
On note X_i la longueur aléatoire de la $i^{ième}$ série.

1. Pour $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler les valeurs des expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2}$$

   ainsi que leurs limites lorsque n tend vers l'infini.

2. Déterminer la loi de X_1. Vérifier que l'on a bien $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = k) = 1$ et déterminer l'espérance et la variance de X_1.

3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2), en déduire la loi marginale de X_2.
   Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) = 1$ et déterminer l'espérance de X_2.

4. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

5. Quelle est la loi de X_3 ? celle de X_4 ? Peut-on généraliser ?

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$

1. (a) Dire pourquoi f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier les variations de f et tracer la courbe (C) représentative de f en repère orthonormé. On précisera en particulier les éventuels points d'inflexion et on tracera sur le même dessin les tangente en ces points.
   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose
   $$H_n(x) = e^{x^2} f^{(n)}(x)$$
   où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f. (On rappelle que, par convention, on a : $f^{(0)} = f$)

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$H_{n+1}(x) = H'_n(x) - 2xH_n(x)$$
   où H'_n est une fonction polynômiale, préciser son degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   α) $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$
   β) $H'_n(x) = -2xH_{n-1}(x)$
   γ) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$
   (c) Déterminer les polynômes H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 ainsi que les racines de ces polynômes.
   (d) Vérifier que la fonction H_n est paire pour n pair et impaire pour n impair.

3. On rappelle que l'on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat)

   (a) Montrer que pour toute fonction polynôme P, l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ existe

   (b) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on pose : $I_{n,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_p(x)e^{-x^2} dx$.

   α) A l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiées, montrer que l'on a :
   $$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad n < p \Rightarrow I_{n,p} = 0$$

   β) En déduire, que pour $k = 1, 2, 3$, la valeur de : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx$

   γ) Calculer enfin : $I_{1,1}$, $I_{2,2}$, $I_{3,3}$.

FIN