ISC 1989 Option économique et technologique

EXERCICE 1

On considère le tableau statistique suivant :

année	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
X	200	210	220	225	240	250	270	302	350	400
Y	165	190	210	230	255	280	330	380	440	520

où X représente l'indice du coût de la construction au 1^{eer} janvier de l'année considérée (base 100 en 1953) et Y l'indice du gain horaire des ouvriers du batiment à la même date (base 100 en 1960)

1. Quel est le taux moyen d'accroissement annuel de l'indice du coût de la construction sur la période considérée ? Même question pour l'indice du gain horaire
2. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre la date et l'indice du coût de la construction ?
   Déterminer une équation de la droite de régression de l'indice du coût de la construction par rapport à la date.
   En déduire une estimation de l'indice du coût de la construction au 1^{er} janvier 1980
3. Déterminer une équation de la droite de régression de l'indice du gain horaire par rapport à l'indice du coût de la construction.
   Quelle sera la valeur de l'indice du coût de la construction lorsque l'indice du gain horaire vaudra 600 ?
   A quelle date interviendra cet évènement ?

EXERCICE 2

Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on définit la fonction f_n par : $\quad f_n(x) = \ln|x-1| + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$.
où ln désigne la fonction "logarithme népérien"
et l'on note (C_n) la représentation graphique de f_n dans un repère orthonormé.

1. Etudier la fonction f_1, c'est-à-dire la fonction définie par : $\quad f_1(x) = \ln|x-1| + \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{x^k}{k} = \ln|x-1| + x$
   et construire la courbe (C_1) correspondante.
   A partir de maintenant, on suppose que l'on a : $n \geqslant 2$.
2. (a) Quel est le domaine de définition de f_n ?
   (b) Vérifier que f_n est dérivable sur son domaine de définition et calculer f_n'.
   En déduire les variations de f_n (on distinguera selon la parité de n).
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, dont l'une notée x_n est supérieure à 1.
4. Préciser les points d'inflexions éventuels de (C_n) et donner une équation de la tangente à (C_n) en ces points.
5. Dans le même repère que précédemment, représenter les courbes (C_2) et (C_3). On donnera en particulier des valeurs approchées de x_2 et x_3 en indiquant la méthode utilisée et en se limitant à la précision de 5.10^{-3}, on indiquera également la nature des branches infinies.

EXERCICE 3

Dans un stand de tir, un joueur dispose de n fléchettes (n fixé, supérieur ou égal à 2) pour tenter de faire éclater un ballon. A chaque essai, la probabilité de succès vaut p (avec $0 < p < 1$) et donc la probabilité de l'échec vaut q (avec $q = 1 - p$). On suppose que les différents essais sont indépendants les uns des autres et que le joueur s'arrête dès que le ballon éclate (s'il éclate !).

1. Soit X le nombre aléatoire de flèchettes utilisées par le joueur.
   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
   (b) Déterminer la loi de X et démontrer que si l'on note $E(X)$ son espérance, on a :
   $$E(X) = \frac{1-q^n}{1-q}$$
2. Sachant que le ballon a éclaté, quelle est la probabilité que ce soit avec la $n^{ième}$ flèchette ?
3. Dans cette question, on suppose que l'on a $n = 3$, $p = \dfrac{1}{2}$.
   Si le joueur fait éclater le ballon avec la $k^{ième}$ flèchette (k compris évidemment entre 1 et 3), il a le droit de lancer $4 - k$ fois une pièce équilibrée et il reçoit 1 franc pour chaque "pile" obtenu.
   Soit Y le gain aléatoire de ce joueur.
   Déterminer la loi du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y, ainsi que son espérance.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^{-x^2}$$

1. Dire pourquoi f est indéfiniment dérivable su $\mathbb{R}$ et déterminer les trois premières fonctions dérivées : f, f', f".
2. On définit les fonctions réelles H_0, H_1, H_2, H_3 par les relations :
   $$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = e^{x^2} f'(x), \quad H_2(x) = e^{x^2} f"(x), \quad H_3(x) = e^{x^2} f'''(x)$$
   Vérifier que pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, H_i est une fonction polynôme et déterminer les racines de chacun de ces polynômes.
3. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout nombre réel x : $\quad H_n(x) = e^{x^2} f^{(n)}(x)$
   où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f (on rappelle que, par convention, on a : $f^{(0)} = f$).
   (a) Montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_{n+1}(x) = H_n'(x) - 2nH_n(x)$$
   (b) En déduire que H_n est une fonction polynôme et préciser son degré, ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.
   (c) Déterminer H_4, H_5 et trouver le nombre de racines de chacun de ces polynômes.