ISC 1990 Option économique et technologique

# EXERCICE 1

On considère la série statistique suivante, donnant les cotations du quintal de plomb au *London Metal Exchange* pendant le mois de Février 1990. (Cours transformés en francs français)

| Date | 1er | 2 | 5 | 7 | 8 | 9 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cours | 436 | 446 | 443 | 440 | 443 | 455 | 468 | 462 | 468 | 470 | 468 | 484 | 488 | 504 | 532 | 527 | 528 | 495 | 533 |

1. Représenter le nuage statistique correspondant en plaçant les dates en abscisse. (*On fera en sorte de n'utiliser que la moitié de la feuille de papier millimétré jointe*).
2. Quel est le coefficient de corrélation entre la date et le prix du plomb ? (On indiquera les formules utilisées et les résultats intermédiaires nécessaires à la compréhension du calcul).
3. La cotation du 27 Février semblant aberrante, déterminer l'équation de la droite de régression du prix du plomb par rapport à la date obtenue en éliminant de la série statistique la cotation du 27 Février.
4. Un industriel doit acheter 10 tonnes de plomb à la date du 5 mars 1990, quel prix estimez-vous qu'il devra payer ?

# EXERCICE 2

1. Etudier les variations de la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :
$$\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$$
(ln désignant la fonction logarithme népérien).
2. Pour tout valeur du paramètre réel $m$, on considère la fonction $f_m$, définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :
$$f_m(x) = x\ln x - x + mx^2$$
   (a) Dire pourquoi $f_m$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et calculer les deux premières fonctions dérivées $f'_m$ et $f"_m$.
   (b) Peut-on prolonger $f_m$ par continuité en 0 ? Cet éventuel prolongement est-il alors dérivable en 0 ?
   (c) Indiquer, selon les valeurs de $m$, le nombre de solutions de l'équation $f'_m(x) = 0$.
   En déduire les différentes formes possibles de la représentation graphique de $f_m$.
3. Représenter graphiquement $f_0$, $f_{\ln 2}$, $f_{-\frac{1}{4}\ln 2}$. (*On utilisera l'autre moitié de la feuille jointe*).

# EXERCICE 3

Une urne contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$, et on effectue des tirages successifs d'un jeton de cette urne avec remise du jeton obtenu avant le tirage suivant.

1. On note $X_i$ le numéro aléatoire obtenu au $i^{ième}$ tirage. Quelle est la loi de $X_i$ ? Son espérance ?
2. Dans cette question, on suppose que l'on a : $n = 3$, et on effectue deux tirages.

(a) Dresseer la liste des résultats possibles de cette épreuve.

(b) On note $m$ le plus petit des deux numéros obtenus et $M$ le plus grand des deux numéros obtenus. Quelles valeurs le couple $(m, M)$ peut-il prendre ?
Déterminer la loi de ce couple et la loi de $M$.

3. On suppose à nouveau $n$ quelconque, et on effectue $k$ tirages successifs (où $k$ est un entier fixé supérieur ou égal à 2). On note $M_k$ le plus grand numéro obtenu au cours des $k$ tirages.

   (a) Déterminer la loi de $M_k$.

   (b) Exprimer l'espérance de $M_k$ à l'aide d'une somme et déterminer la limite de cette espérance lorsque $k$ tend vers l'infini.

## EXERCICE 4

1. Etudier les variations de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 5x - 1$$

   En déduire que l'équation $x^3 - 5x - 1 = 0$ possède trois racines que l'on notera $a, b, c$ avec $a < b < c$.
   (On ne demande pas de calculer $a, b, c$, mais on en donnera des valeurs approchées à $10^{-1}$ près).

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0$ réel et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^3 - 1)$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone.

   (b) Si la suite $(u_n)$ est convergente, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

   (c) Etudier la suite $(u_n)$ dans les trois cas particuliers suivants :

$$u_0 = -3; \qquad u_0 = 0; \qquad \text{et enfin } : u_0 = 3$$