

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme associé relativement à la base canonique \mathfrak{B} de \mathbb{R}^4 .

1. Calculer $9A^3 - 9A^2 - A + I$, où I désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $E_{(\lambda)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } u(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$
 - (a) Vérifier que $E_{(\lambda)}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et que si $\lambda \notin \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$, alors $E_{(\lambda)}$ est réduit au vecteur nul.
 - (b) Déterminer $E_{(1)}$, $E_{\frac{1}{3}}$, $E_{-\frac{1}{3}}$ et donner une base aussi simple que possible de chacun.
 - (c) En déduire qu'il existe au moins une base \mathfrak{B}' de \mathbb{R}^4 telle que la matrice de u relativement à cette base \mathfrak{B}' soit diagonale.
 - (d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base \mathfrak{B} relativement à la base \mathfrak{B}' et en déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}^\times$

EXERCICE 2

Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

1. Un joueur extrait un jeton au hasard de cette urne. Soit X_1 le numéro aléatoire obtenu. Quelle est la loi de X_1 ? Son espérance et sa variance ?
2. Ce joueur a maintenant droit à deux essais, au maximum. Il décide d'utiliser la stratégie suivante : Il se donne à priori un nombre k et
 - Si le 1^{er} tirage amène un jeton dont le numéro est égal à k , il arrête le tirage.
 - Si le 1^{er} tirage amène un jeton dont le numéro est strictement inférieur à k , il replace ce jeton dans l'urne et effectue alors un second tirage.

Soit X_2 le numéro aléatoire obtenu par le joueur à son dernier tirage.

Quelle est la loi de X_2 ? Son espérance ?

Pour quelle valeur de k l'espérance de X_2 est-elle maximale ?

3. Ce joueur a à nouveau droit à deux essais, avec remise, et X_3 est le plus grand des deux numéros obtenus. Quelle est la loi de X_3 ? Son espérance ? Vérifier que cette dernière règle donne une espérance supérieure à n'importe quelle stratégie relative à la question 2.

PROBLEME

Pour toute valeur de l'entier strictement positif n , on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n : x \mapsto x^n e^x$$

1. Etudier les variations de f_n , en précisant les points remarquables, la nature des branches infinies et la concavité.
2. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans \mathbb{R}_+^\times , on la note a_n dans la suite du problème.
(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est monotone et convergente. Déterminer sa limite.
3. On désire trouver une valeur approchée de a_1 .
(a) Déterminer un encadrement de a_1 , d'amplitude 0, 1; en précisant la méthode utilisée.
(b) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0,5; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{-u_n}.$$

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et trouver un nombre $K \in]0, 1[$, aussi petit que possible, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K |u_{n+1} - u_n|$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est a_1 .

Donner un encadrement de a_1 d'amplitude 10^{-2} .

- (c) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 0,57; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 0,57e^{-v_n} + 0,43v_n$$

Trouver un nombre $K' \in]0, 1[$, aussi petit que possible, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{n+1} - a_1| \leq K' |v_n - a_1|$$

En déduire un encadrement de a_1 d'amplitude 10^{-6} .

4. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx; \quad J_n = \int_0^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} f_n(x) dx$$

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = +\infty$.

- (b) Montrer que la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est convergente. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}$.