ISC 1991 Option économique et technologique

EXERCICE 1

On considère pour les années 1988 et 1989 les statistiques de construction de logements neuf (France entière), cumulées par trimestre d'une même année et ventilées selon les secteurs de financement :

L pour "locatif aidé", A pour "accession aidée", S pour "secteur libre"

	3 premiers mois 1988	6 premiers mois 1988	9 premiers mois 1988	12 premiers mois 1988	3 premiers mois 1989	6 premiers mois 1989	9 premiers mois 1989	12 premiers mois 1989
L	12,2	22,6	33,4	47,6	9,9	17,8	26,9	36,6
A	16,5	32,9	47	62,3	13,2	26,2	37,5	45,7
S	70,6	142,6	221,9	305,1	79,3	152,9	231,7	308,3

Source : SICLONE (Système d'information sur la construction de logements et locaux neufs - Ministère de l'équipement); unité : 1 millier de logements.

1. Déterminer, pour chaque trimestre de la période considérée, la part de chaque secteur de financement pour CE trimestre, par rapport à l'ensemble des logements construits au cours de ce trimestre.
(Les résultats seront donnés en pourcentages, arrondis à 0,1 % près au plus proche, et présentés dans un tableau).

2. Les trimestres de la période considérée sont numérotés de 1 à 8.

   (a) Tracer le nuage de points obtenu en plaçant en abscisse le rang du trimestre et en ordonnée la part du secteur libre correspondant à ce trimestre.

   (b) Déterminer l'équation de la droite de regression de la part du secteur libre par rapport au rang du trimestre.
   (On indiquera les formules utilisées et on placera cette droite sur le graphique précédent).

   (c) En l'absence de phénomènes régulateurs, à quelle période estimez-vous que la part du secteur libre représenterait plus de 95 % de la construction de logements ?

EXERCICE 2

On dispose de deux pièces A et B non équilibrées. La pièce A donne "Pile" à un lancer quelconque avec la probabilité a (avec $0 < a < 1$), tandis que la pièce B donne "Pile" avec la probabilité b (avec $0 < b < 1$).
On effectue des lancers successifs de l'une des deux pièces de la façon suivante :

1. Pour le premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard.
Calculer la probabilité P_1 d'obtenir "Pile"

2. Pour $n \geqslant 2$, si l'on obtient "Pile" au $(n-1)^{ième}$ lancer avec la pièce A et sinon on effectue le $n^{ième}$ lancer avec la pièce B. On note P_n la probabilité d'obtenir "Pile" au $n^{ième}$ lancer.

   (a) Déterminer une relation entre P_n et P_{n-1}.

   (b) En déduire P_n en fonction de n ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

   (c) Soit X_n le nombre aléatoire de "Pile" obtenus au cours de n premiers lancers.
   Déterminer l'espérance de X_n.

EXERCICE 3

Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose : $a_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$, $\quad A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

1. Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 2$:
$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ est convergente.
On notera, dans la suite de cet exercice. A la limite de cette suite et on ne cherchera pas à calculer exactement A.

2. Donner, en fonction de n, un majorant très simple de $A - A_n$.
A partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que A_n est une valeur approchée de A à moins de 10^{-4} près ?

3. Pour accélérer la convergence, on pose :
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n$$
   (a) Calculer b_n en fonction de n et vérifier que l'on a :
$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < b_n < \frac{6}{n^5} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{6}{t^5} dt$$
   (b) Vérifier que l'on a :
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Exprimer B_n en fonction de n et de A_n, en déduire que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ est convergente.
   (d) Soit B la limite de la suite (B_n). Montrer que : $B - B_n \leqslant \dfrac{3}{2n^4}$.
   A partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que B_n est une valeur approchée de B à moins de 10^{-4} près ?
   Conclure

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x^2 - 2|x| + 1)$. (ln désignant le logarithme népérien)

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et que l'équation $f'(x) = 0$ admet une et une seule solution positive notée α.
Donner une valeur approchée à 5.10^{-3} près de α.

3. Etudier les variations de f et préciser les éventuelles branches infinies.

4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

FIN