ISC 1998 Option scientifique

EXERCICE 1 (5 points)

Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2, M^3. La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul , M^{2n} et M^{2n-1}.
2. I désignant la matrice unité d'ordre 3 , montrer que $M + I$ est inversible et que son inverse est combinaison linéaire de I, M et M^2.
3. Soit $A = (M + I)^{-1} \times (I - M)$.
   Montrer que A est inversible et que l'inverse de A est égal à la transposée de A. Quelle est la signification de ce résultat ?
4. M étant considérée comme élément de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer les valeurs propres de M. Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

EXERCICE 2 (5 points)

Soit n un nombre entier naturel non nul.Un joueur effectue une succession de n parties indépendantes de " pile ou face ". Il gagne chaque partie avec la probabilité p et la perd avec la probabilité $q = 1 - p$.

1. On suppose , **dans cette question seulement** , $p = \dfrac{1}{2}$ Soit X_n le nombre aléatoire de parties gagnées.
   (a) Quelle est la loi de X_n ? Quelle est son espérance ? Sa variance ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'à l'issue de ces n parties , le joueur totalise un nombre de victoires strictement supérieur au nombre de défaites ?

   A partir de maintenant , on suppose simplement que l'on a $0 < p < 1$.

2. Pour i entier compris entre 2 et n , on note Z_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $(i-1)^{éme}$ partie se solde par un succès et la $i^{ème}$ par un échec , et qui vaut 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de Z_i, son espérance et sa variance.
   (b) Soient i et j entiers tels que $2 \leqslant i < j \leqslant n$.Les variables Z_i et Z_j sont-elles indépendantes ?.
   Calculer la covariance du couple (Z_i, Z_j). (On sera amené à distinguer le cas $j = i + 1$ des autres cas.)
   (c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z_2 + Z_3 + ... + Z_n$.
3. Quelle est- la probabilité, qu'au cours de ces n parties , un succès ne soit jamais suivi d'un échec ?

PROBLEME (10 points)

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} = (2n+1)(W_n - W_{n+1}).$$

2. En déduire qu'il existe un nombre k , que l'on déterminera , tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times k.$$

Partie II

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions polynômiales sur P.
On rappelle que l'on a , pour tout angle x ,

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

1. Montrer que pour toute fonction f de E , l'intégrale $\int\limits_{-1}^{1} f(t)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt$ est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int\limits_{-1}^{1} t^n \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt$.

   (a) Montrer que , pour tout n de $\mathbb{N}$: $I_n - I_{n+1} = \int\limits_{-1}^{1} t^n \sqrt{1-t^2}dt$.
   Que peut-on en déduire lorsque n est impair ?

   (b) A l'aide du changement de variable $x \mapsto t = \cos x$, Montrer que l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int\limits_0^{\pi} (1 + \cos x)(\cos x)^n dx.$$

   (c) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = 2W_p$. Calculer de même I_{2p-1} , pour $p \in \mathbb{N}^{\times}$.

Partie III

Soit n un entier naturel quelconque et F_n le sous- espace vectoriel de E formé des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n. Pour f et g dans F_n, on pose :

$$p(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt.$$

1. Montrer que p est un produit scalaire sur F_n.
   On pourra noter dans la suite de ce problème : $\langle f, g\rangle = p(f,g)$ et $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

2. A toute fonction f de F_n , on associe la fonction g définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = (t^2 - 1)f''(t) + (2t - 1)f'(t)$$

(f' et f'' désignant les deux premières fonctions dérivées de la fonction f.)

(a) Vérifier que g est encore élément de F_n.

(b) Vérifier que l'application φ_n , qui à f associe g , est un endomorphisme de F_n.

3. Dans cette question , on suppose $n = 2$.

(a) Déterminer 3 nombres a, b, c, tels que les trois fonctions

$$f_0 : t \longmapsto 1; \quad f_1 : t \longmapsto t + a; \quad f_2 : t \longmapsto t^2 + bt + c;$$

forment une base orthogonale pour le produit scalaire p.

(b) En déduire une base orthonormée (e_0, e_1, e_2) de F_2 , telle que chaque e_i soit une fonction polynômiale de degré i.
Comment s'appelle la procédure ainsi mise en place ?

(c) Déterminer la matrice de φ_2 relativement à la base canonique C de F_2 (C est formée , dans cet ordre , des fonctions

$$t \longmapsto 1; \quad t \longmapsto t; \quad t \longmapsto t^2;$$

Quelles sont les valeurs propres de φ_2 et les fonctions propres associées ?

(d) En déduire que φ_2 est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(F_2, \langle ., . \rangle)$.

4. On suppose à nouveau n quelconque. Soient f et h quelconques dans F_n. En écrivant :

$$\langle \varphi_n(f), h \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} h(t).((t^2-1)f''(t) + 2tf'(t))dt - \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} h(t).f'(t)dt$$

et en procédant à une intégration par parties pour transformer la première intégrale , montrer que φ_n est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(F_n, \langle ., . \rangle)$.