ISC 1999 Option technologique

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & 9 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer A^2 , puis déterminer a et b tels que $A^2 = aA + bI$.
   (b) En déduire que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et I, puis calculer A^{-1}.
   (c) Utiliser le calcul de A^{-1} pour résoudre le système $\begin{cases} -2x + 2y - 3z = 2 \\ 3x - 7y + 9z = 0 \\ 2x - 4y + 5z = -2 \end{cases}$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = (-1)^n[(1 - 2^n)A + (2 - 2^n)I].$$

Exercice 2

On rappelle que pour tout u réel, $\exp u = e^{-u}$.

1. On définit les deux fonctions ϕ et ψ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\phi(u) = e^{-u} - 1 + u \quad \text{et} \quad \psi(u) = e^{-u} - 1 + u - \frac{1}{2}u^2.$$

   (a) Etudier les variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}_+$, construire son tableau de variations, et en déduire le signe de ϕ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que pour tout réel u de $\mathbb{R}_+$, $\psi'(u) = -\phi(u)$. en déduire les variations de la fonction ψ sur $\mathbb{R}_+$, construire son tableau de variations, et en déduire le signe de ψ sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) A partir de l'étude faite en a) et b), montrer que pour tout réel u positif ou nul on a :

$$1 - u \leqslant e^{-u} \leqslant 1 - u + \frac{1}{2}u^2.$$

2. Pour n entier naturel non nul, on définit sur $[0, 1]$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right)$$

   et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

   (a) En utilisant la double inégalité obtenue à la **partie I** c) , montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$1 - \frac{x^2}{n} \leqslant f_n(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{n} + \frac{x^4}{2n^2}.$$

   En déduire en fonction de n un encadrement de I_n.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.
   (c) En utilisant l'encadrement de I_n obtenu en b), donner un encadrement de $n(I_n - 1)$, puis montrer que la suite $(n\,(I_n - 1))_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3

Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, l'entreprise effectue des contrôles à la suite desquels 0,6% des jouets restent défectueux : un jouet contrôlé a ainsi la probabilité $0,006$ de rester défectueux. On considère un lot de n jouets contrôlés et parmi ceux-ci, on appelle X le nombre de jouets restant défectueux.

1. Sur n jouets contrôlés, quelle est la probabilité qu'il ne reste aucun jouet défectueux ? quelle est la valeur maximale de pour laquelle cette probabilité est supérieure ou égale à $0,5$?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? (on justifiera avec soin le résultat).
3. Pour $n = 500$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X ?

   En déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait au plus deux jouets restant défectueux.
4. Pour $n = 10\ 000$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X ?

   en déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait entre 50 et 70 (au sens large) jouets restant défectueux.
5. Les n jouets sont vendus (n est fixé, quelconque) et le retour à l'entreprise ainsi que la réparation d'un jouet défectueux coûtent 40 euros. Sur ces n jouets, soit Y le prix de revient total des retours et réparations.

   Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.

   De combien doit-on majorer le prix de vente de chacun de ces n jouets pour couvrir le frais entraînés par la réparation des jouets défectueux dans ce lot de n jouets ?

Exercice 4

Une urne contient 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 2 boules noires ? une seule boule noire ? aucune boule noire ?
Une urne contient 1 boule noire et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir ainsi 1 boules noires ? aucune boule noire ?
On dispose d'une urne U_0 contenant 2 boules noires et trois boules blanches, et d'urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, chacune contenant 3 boules blanches . On tire simultanément 2 boules de l'urne U_0, on les place dans l'urne U_1, et on appelle X_1 le nombre de boules noires contenues alors dans l'urne U_1.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et calculer son espérance ;

   De l'urne U_1 contenant alors 5 boules, on tire simultanément 2 boules et on les place dans U_2 .... Et ainsi de suite. On a défini ainsi pour n entier naturel, X_n : le nombre de boules noires contenues dans U_n lorsque les 2 boules provenant de l'urne précédente y ont été déposées et juste avant de tirer 2 boules de l'urne U_n.
2. Pour n entier naturel non nul, décrire l'événement $(X_n = 2)$ et en déduire que $P(X_n = 2) = (0,1)^n$.
3. Pour n entier naturel non nul, montrer que

   $$P(X_{n+1} = 1) = 0,6P(X_n = 2) + 0,4P(X_n = 1).$$

   Puis montrer par récurrence que, pour n entier naturel non nul, on a :

   $$P(X_n = 1) = 2 \times (0,4)^n - 2 \times (0,1)^n.$$
4. Calculer, pour n entier naturel non nul l'espérance de X_n et la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

Valeurs numériques

$\sqrt{0,006 \times 0,994} \approx 0,0772$; $\quad \dfrac{10}{7,72} \approx 1,30$; $\quad \dfrac{10,5}{7,72} \approx 1,36$; $\quad e^{-1} \approx 0,368$;

$e^{-2} \approx 0,135$; $\quad e^{-3} \approx 0,050$; $\quad \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,006} \approx 0,14$; $\quad \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,994} \approx 115,18$;

$\dfrac{\ln 0,994}{\ln 0,5} \approx 0,0087$; $\quad \Phi(0,30) \approx 0,618$; $\quad \Phi(1,36) \approx 0,913$; $\quad \Phi(1,30) \approx 0,903$,

Φétant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.