ISCID 1986 Option générale

PROBLEME I

A. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$ avec λ réel strictement positif.

(1) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = f \\ \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(u) f(t-u) du \end{array} \right.$$

a. Monter que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall t \leqslant 0, \quad f_n(t) = 0$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall t \geqslant 0, \quad f_n(t) = \int\limits_0^t f_{n-1}(u) f(t-u) du.$

(2) a. Calculer $f_1(t)$ et $f_2(t)$ pour tout t réel.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall t \geqslant 0, \quad f_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} \lambda e^{-\lambda t}$

(3) a. Les fonctions f_n sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?

b. Les fonctions f_n sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}$?

c. Etudier les variations de f_n (on cherchera en particulier les extremums et les points d'inflexion). Dreser le tableau de variation de f_n.

d. Pour n entier naturel non nul, comparer f_n et f_{n-1}.

e. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f_0, f_1 et, pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, f_n et f_{n-1}.

B. (1) Soit $I_p = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u} u^{p-1} du$, p entier naturel non nul.

a. Montrer que l'intégrale définissant I_p est convergente.

b. Montrer que $I_p = (p-1) I_{p-1}$. En déduire la valeur de I_p.

(2) Montrer que f_n peut-être considérée comme la densité d'une variable aléatoire continue X_n.

(3) Calculer l'espérance mathématique $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n. en déduire que la suite des variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ définie par :

$$Y_n = \frac{1}{n+1} X_n$$

converge en probabilité vers une variable certaine que l'on déterminera.

PROBLEME II

Dans tout le problème, les candidats indiqueront pour chaque question la méthode de calcul et les formules utilisées. Les valeurs nécessaires au calcul statistique et les résultats demandés dans l'énoncé seront regroupés sur une feuille intercalaire, dans un tableau (T), que vous construirez.

Une compagnie de navigation exploite la ligne Calais-Douvre entre la France et l'Angleterre. Le trafic de fret peut-être représenté par le tableau ci-dessous, qui donne le nombre de camions en fonction du mois considéré.

année \ mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1983	9350	9600	11300	9750	10800	11700	11950	9300	12850	13450	12850	11900
1984	12000	10300	13200	11100	11250	12100	11000	9700	12350	14100	14400	12450
1985	8900	13300	15500	14000	14700	15100	16950	11700	14850	17650	17050	18750

Le but de ce problème est de réaliser une prévision conjonctuelle du trafic, compte tenu des variations saisonnières.

A. (1) On désigne par $t_i = i$, $i \in \{1, 2, .., 36\}$, les différents mois concernés ($t_1 = 1$ correspond à J 1983, $t_2 = 2$ à F 1983, ..., $t_{36} = 36$ à D 1985) et par x_i la valeur du caractère observée durant le mois t_i.
Reporter les valeurs (t_i, x_i) dans le tableau (T)
Représenter le nuage de points correspondants à la série statistique (t_i, x_i)
(échelle : abscisse 0,5 cm = 1mois; origine = $t_1 = 1$;)
ordonnéé 2 cm = 1 000 unités; origine = 8 500
Joindre les points du nuages par des segments de droite. On obtient ainsi une ligne brisée avec des "pics" très prononcés.

(2) Calculer un ajustement linéaire de la série statistique précédente par la méthode des moindres carrés (les coefficients de la série obtenue seront arrondis à l'entier le plus proche).
Tracer la droite d'ajustement sur le graphique précédent.

B. (1) Soit la droite d'équation

$$(E) : x = 181t + 9407$$

Calculer les valeurs x_i corrigées, notées x_{ic}, obtenue en calculant x_{ic} en fonction de t_i dans l'équation précédente (E).
Reporter les valeurs x_{ic} dans le tableau (T).

(2) Calculer les rapports $\dfrac{x_i}{x_{ic}}$ (les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près au plus proche) et les reporter dans le tableau (T).

(3) On appelle coefficient saisonnier d'un mois la moyenne arithmétique des rapports calculés dans la question B2 correspondant au mois considéré.
Calculer les coefficients saisonniers c_j, $j \in \{1, 2, .., 12\}$, des 12 mois de l'année (les résultats seront arrondis à 10^{-2} près arrondi au plus proche)

(4) Calculer les valeurs x_{id} obtenues en divisant les valeurs x_i par le coefficient saisonnier du mois x_i (les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche). et les reporter dans le tableau (T)
La série statistique (x_{id}) est la série désaisonnalisée de la série (x_i).
Représenter le nuage statistique (t_i, x_{id}), sur le même graphique que celui de la question A1 et joindre les points du nuage comme précédemment.
On constate que les "pics" de la ligne brisée sont atténués.

(5) Calculer un ajustement linéaire de la série désaisonnalisée, par la méthode des moindres carrés (les coefficients de la droite seront arrondis à l'entier le plus proche).
Tracer la droite d'ajustement sur le graphique.

(6) Dans le cadre de la prévision conjonctuelle, utiliser cette dernière droite pour calculer x_{37d} et x_{38d}.
En déduire x_{37} et x_{38} à l'aide des coefficients saisonniers (les valeurs seront arrondies à l'entier le plus proche)