ISCID 1987 Option économique

PROBLEME I

1. Soit $\mathcal{L}$ la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2x}{x+1}$$

   (a) Montrer que l'on peut trouver deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathcal{L}(x) = a + \frac{b}{x+1}$$

   (b) Déterminer les variations de $\mathcal{L}$ et construire avec soin la partie de sa courbe représentative comprise entre les points d'abscisses 0 et 1 (l'unité graphique : 10 cm)

2. On considère la suite numérique u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \mathcal{L}(u_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que u est définie sur $\mathbb{N}$ et que, pour tout entier n.

   (b) Représenter u_0, u_1, u_2, u_3 sur le graphique du 1b en utilisant la courbe représentative de $\mathcal{L}$.

   (c) Déterminer la variation de u et en déduire sa convergence. Calculer sa limite l.

   (d) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel :

$$|u_{n+1} - l| \leqslant \frac{8}{9} |u_n - l|$$

   et en déduire un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n \Rightarrow |u_n - l| \leqslant 10^{-3}$$

3. On se propose d'expliciter le terme général de la suite u en utilisant le calcul matriciel :

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un rationnel.
   On pose $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels non nuls.

   (b) Déterminer une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients réels, A telle que :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

   En déduire que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (c) Diagonaliser A et en déduire les expressions de p_n, q_n et u_n en fonction de n.

   (d) En déduire le plus entier naturel n tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant 10^{-3}$$

PROBLEME II

L'objet de ce problème est d'évaluer la rapidité d'insertion d'une nouvelle fiche dans un fichier classé pour deux méthodes simples.
Nous supposerons le fichier totalement ordonné, par exemple, alphabétiquement, et composé de 2^n fiches (n étant un entier naturel non nul) :

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2^n}$$

dans lequel la nouvelle fiche x doit être insérée à sa juste place :

- en tête du fichier, si $x < a_1$;
- entre les fiches a_i et a_{i+1}, si $a_i < x_i < a_{i+1}$;
- en queue du fichier, si $x > a_{2^n}$.

Question préliminaire

Dénombrer les positions possibles de la nouvelle fiche x dans le fichier

Première partie

La première méthode d'insertion consiste à comparer x et a_1 et à placer x en tête du fichier si $x < a_1$ et sinon à comparer x à a_2, placer x entre a_1 et a_2 si $a_1 < x < a_2$ sinon comparer x à a_j ...
Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de comparaisons à effectuer avant de placer convenablement x dans le fichier.

Déterminer la loi et l'espérance de X_1.

Deuxième partie

La seconde méthode consiste à ouvrir le fichier en son mileu (c'est-à-dire entre les fiches 2^{n-1} et $2^{n-1}+1$), à comparer x à $a_{2^{n-1}}$ et à $a_{2^{n--1}+1}$, placer x entre ces fiches si $a_{2^{n-1}} < x < a_{2^{n-1}+1}$, sinon déterminer dans quelle moitié du fichier, x doit être placé, ouvrir cette moitié en ce milieu, et recommencer ainsi de suite jusqu'à ce que la place de x soit trouvée.
On appelle X_2 la variable aléatoire égale au nombre de manipulations consistant à ouvrir le fichier jusqu'à ce que la place correcte de x soit trouvée.

1. Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Calculer :
$$P(X_2 = 1), \quad P(X_2 = 2), \quad P(X_2 = 3)$$
2. Dans le cas général, où n est un entier naturel non nul, déterminer la loi de X_2.
3. En utilisant la dérivation, calculer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} kt^{k-1}$, où t est un nombre réel différent de 1. En déduire l'espérance de X_2.
4. Donner un équivalent simple, lorsque n tend vers l'infini, du rapport des espérances $\dfrac{E(X_1)}{E(X_2)}$.