ISCID 1987 Option technologique

L'épreuve est constitué de deux exercices et d'un problème.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes.

Les candidats sont invités à lire attentivement tout le sujet.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

On rappelle que le logarithme népérien d'un réel x strictement positif se note $\ln(x)$ et l'exponentielle d'un réel y se note $\exp(y)$ ou e^y

EXERCICE I

Une entreprise fabrique trois articles X_1, X_2 et X_3 : chaque article passe dans trois ateliers différents Y_1, Y_2 et Y_3 suivant la répartition horaire suivante :

- La fabrication d'une unité de X_1 nécessite deux heures d'atelier Y_1, cinq heures d'atelier Y_2 et trois heures d'atelier Y_3
- La fabrication d'une unité de X_2 nécessite une heure d'atelier Y_1, trois heures d'atelier Y_2 et deux heures d'atelier Y_3
- La fabrication d'une unité de X_3 nécessite une heure d'atelier Y_1, deux heures d'atelier Y_2 et deux heures d'atelier Y_3

On appelle y_1, y_2 et y_3 les nombres respectifs d'heures d'ateliers Y_1, Y_2, Y_3 nécessaires à la fabrication de x_1 unités de X_1, x_2 unités de X_2 et x_3 unité de X_3

1. Exprimer y_1, y_2, y_3 en fonction de x_1, x_2, x_3.
   Donner une forme matricielle de ce résultat.
2. Soit la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
3. Montrer que $A^3 - 7A^2 + 4A - I_3 = 0$ où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire une expression de A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2.
   Retrouver le résultat du 2
4. Au cours d'un programme de fabrication, la charge horaire des différents ateliers a été la suivante :

Y_1	Y_2	Y_3
235	585	420

   Quelles ont été les quantités d'articles fabriqués ?
5. Le coût horaire, exprimier en francs, de chaque atelier est

Y_1	Y_2	Y_3
70	75	67

   Evaluer le coût unitaire de chaque article fabriqué, le coût du programme de fabrication précédent. Indiquer une écriture matricielle qui donne ces coûts.

EXERCICE II

Les candidats sont invités à utiliser les programmes de leur calculatrice.
Il n'est pas nécessaire de présenter les calculs sous la forme d'un tableau.

Evolution de la consommation médicale et de la consommation des ménages français entre 1975 et 1985
(INSEE, Tableau de l'économie française)

Année	Rangs de l'année t_i	Consommation médicale en millions de frans	Consommations des ménages en millions de francs
1975	0	97 223	895 011
1976	1	113 765	1 037 169
1977	2	127 438	1 166 308
1978	3	151 636	1 328 806
1979	4	176 601	1 517 634
1980	5	205 413	1 742 652
1981	6	242 058	2 005 798
1982	7	282 105	2 306 244
1983	8	318 714	2 551 062
1984	9	353 776	2 757 255
1985	10	394 047	2 984 413

1. On pose $u_i = \log x_i$ et $v_i = \log y_i$ (log : logarithme décimal)
   Représenter sur un même graphique, dont on choisira avec soin les unité, les nuages de points $M_i = (u_i, t_i)$ et $N_i = (v_i, t_i)$
2. Pour chacun des deux nuages, déterminer le point moyen, le coefficient de corrélation linéaire. L'ajustement linéaire est-il valide ?
3. Déterminer les équations des droites de régression de u en t et de v en t.
   Les tracer sur le graphique précédent.
4. En déduire entre x et t et entre y et t, des relations du type

   $$x = ke^t \quad \text{et} \quad y = rd^t$$

   Préciser ces divers coefficients.
5. Quelle est la part consacrée par les français en 1985 à leur santé ?
   En utilisant les modèles précédents, en quelle année cette part sera-t-elle doubler ?

PROBLEME

A/. On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{x} - e^{-0,05x} \\ g(x) &= -1 + 0,05x^2 e^{-0,05x} \end{aligned}$$

(1) Etudier les variations de g et préciser les limites de g aux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$.

(2) Quel est, sur $]0, +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.
On appelle u la plus petite de ces solutions; déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n10^{-1} < u < (n+1)10^{-1}$$

On donnera quelques explications sur la méthode utilisée.

(3) Dresser le tableau de variations de f (pour déterminer le signe de f', on utilisera l'identité $f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x)$).
Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.

(4) Quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

B/. Pour dépister une maladie à l'aide d'un test sanguin, sur une population importante de taille N, on utilise la procédure $(\mathcal{P})$ suivante :
Les prélèvements sanguins de k personnes sont mélangés, puis analysés ensemble.
Si le test est négatif, cette unique analyse suffit à montrer que ces k personnes ont toutes un test négatif; si le test est positif, on analyse alors séparément chacun des prélèvements.
On appelle p la probabilité qu'une personne ait un test positif; on suppose cette probabilité identique pour toutes les personnes testées. On fait aussi l'hypothèse d'indépendance des personnes testées.
Le but du problème est de déterminer le meilleur k, pour effectuer en moyenne, le moins d'analyses.

(1) Déterminer en fonction de p et k, la probabilité que le mélange des prélèvements de k personnes donne un test négatif, positif.

(2) On appelle X, le nombre d'analyse nécessaires pour dépister la maladie chez un groupe de k personnes, en utilisant la procédure $(\mathcal{P})$.
Montrer que X ne peut prendre que les valeurs 1 et $(k+1)$; quelle est la loi de X, son espérance ?

(3) On appelle Y le nombre d'analyses nécessaires pour dépister la maladie dans la population totale, quand on a regroupé les N individus en groupes de k personnes et utilisé la procédure $(\mathcal{P})$ (N est supposé être un multiple de k).
Montrer que l'espérance de Y, notée $E(Y)$, vaut

$$E(Y) = N\left(1 + \frac{1}{k} + (1-p)^k\right)$$

(4) On suppose p tel que $\ln(1-p) = -0,05$.
Donner une valeur approchée de p à 10^{-4} près. Ecrire $E(Y)$ en fonction de f.
En utilisant A/4, déterminer l'entier k qui permet d'effectuer en moyenne, le moins d'analyses.
Quel est, en pourcentage, l'économie réalisée en utilisant la procédure $(\mathcal{P})$, plutôt que l'analyse sanguine séparée de chaque individu de la population ?

(5) Reprendre les calculs pour $p = 0,001$