ISCID 1988 Option économique

Le soin apporté par le candidat à la rédaction et au tracé des graphiques, la précision, la simplicité et la clarté de l'argumentation seront pris en compte dans la notation

EXERCICE

Un centre de formation continue organise des stages pour des groupes de 20 personnes. On suppose que, parmi ces stagiaires, 10 % sont gauchers et 90 % droitiers

1. Quelle est la probabilité pour qu'un groupe donné comprenne deux gauchers ?
2. Supposons que le centre utilise pour la formation de ces stagiaires une salle disposant de quatre chaises pour gauchers et 18 chaises pour les droitiers (les chaises diffèrent selon le côté où est située la tablette pour écrire).
   Quelle est la probabilité pour que chaque stagiaire trouve une chaise qui lui convienne ?
3. Soit X la variable aléatoire dont les valeurs sont égales au nombre de stagiaires du groupe qui trouvent une chaise à leur convenance. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
4. Quelles quantitiés minimales de chaises, dont on précisera le type, devrait-on ajouter dans la salle pour que dans 95 % des cas, tous les stagiaires d'un groupe de 20 personnes trouvent une chaise qui leur conviennent.
   Les résultats demandés seront donnés avec la précision permise par la table donnée en annexe.

Annexe

La table ci-dessous donne les valeurs de $10^4 P(X=k)$ pour une variable aléatoire suivant la loi binômiale de paramètres 20 et 0,1

k	$10^4 P(X=k)$
0	1216
1	2702
2	2852
3	1901
4	0898
5	0319
6	0088
7	0020
8	0004
9	0000

PROBLEME

On étudie l'évolution de la vente d'un produit dans un contexte conduisant à la saturation du marché. Après avoir établi la demande potentielle à terme, c'est-à-dire le nombre a (a étant un entier naturel non nul) d'unités du produit susceptibles d'être vendues jusqu'à saturation du marché, on relève périodiquement le nombre d'unités déjà commercialisées. A la $n^{ième}$ observation périodique (n étant un entier naturel), p_n désigne le taux de couverture du marché, c'est-à-dire le rapport du nombre d'unité déjà commercialisées à a. On suppose que $p_0 = \frac{1}{2}$.

L'objet du problème est d'estimer p_k et d'analyser son évolution

Les quatres parties sont largement indépendantes

Première partie

On désigne par $B = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice M_α dans cette base (où $\alpha \in \mathbb{R}$) : $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer très simplement les valeurs propres et les sous-espaces propres de u_α.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}M_\alpha P$ soit diagonale.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de M_α^n.

Deuxième partie

On suppose que l'accroissement du taux de couverture d'une période à la suivante est proportionnel à la fois à ce taux (grâce à une demande induite par les ventes déjà réalisées) et à la part de marché restant à couvrir, pour un coefficient de proportionnalité k ($k \in]0, 1]$) indépendant de la période d'observation :

$$(R). \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} - p_n = kp_n(1 - p_{n+1})$$

1. Montrer que la suite p, de terme général p_n, vérifie une relation de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = f_k(p_n),$$
où l'on explicitera f_k.
2. Etudier la variation de f_k et en déduire que :
$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leqslant t \leqslant f_k(t) \leqslant 1.$$
Tracer la courbe représentative de $f_{1/2}$ dans un repère cartésien orthonormé (unité : 2 cm).
On précisera l'intersection entre la courbe représentative de f_k et la première bissectrice.
3. En utilisant la courbe précédente, déterminer graphiquement les termes de la suite p pour $k = \dfrac{1}{2}$.
4. Déduire du 2, dans le cas général, que la suite p est croissante et majorée.
Montrer qu'elle converge et calculer sa limite.

Troisième partie

On suppose que p demeure définie par la relation de récurrence (R) et on pose, pour tout entier naturel n :

$$x_n = \frac{1}{p_n}.$$

1. Montrer que x est une suite arithmético-géométrique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n désigne le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = M_\alpha X_n,$$
où l'on explicitera α en fonction de k.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M_\alpha^n X_0$.
4. En déduire l'expression explicite de x_n en fonction de n, puis celle de p_n.
5. Déterminer le plus petit entier naturel n de sorte que le taux de couverture p_n soit d'au moins 90 %.
Application numérique : $k = \dfrac{1}{2}$.

Quatrième partie

Soit Φ la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$\Phi(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$

1. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \Phi(n \ln(1+k))$
2. Etudier la variation de Φ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
3. Montrer que Φ définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue T dont on déterminera la densité ϕ et l'espérance m.