ISCID 1988 Option générale

I. EXERCICE

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice associée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Question 1

a) Montrer que la méthode du pivot de Gauss que A admet une factorisation du type LU, où L est triangulaire inférieure unipotente et U triangulaire supérieure.

b) Calculer A^{-1}.

Question 2

a) Montrer que A admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 (on note λ_1 la plus grande des deux).
Préciser E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2.

b) Montrer qu'il existe deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs propres de A.
En donner une et écrire la matrice de f dans cette base.

II. PROBLEME

(A)

Question 1

1. Etudier rapidement la fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2 - t - 2e^{-t} \end{array}$
2. En déduire que l'équation
$$(E) : 2 - t - 2e^{-t} = 0$$
admet deux solutions dont une strictement positive.
Si a est cette solution, vérifier l'inégalité $1,5 < a < 1,6$.

Question 2 Soit u la suite réelle de terme général u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1. Montrer que la suite u est croissante, majorée et qu'elle converge vers a.
2. Montrer que pour tout élément t de l'intervalle

$$[1,5; a[, \quad \left|e^{-t} - e^{-a}\right| \leqslant |t - a| \, e^{-\frac{3}{2}}$$

3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| = 2\left|e^{-u_n} - e^{-a}\right|$$
puis en utilisant l'inégalité précédente, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| < (2.e^{-\frac{3}{2}})^n\, |u_0 - a|$$
En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| < \frac{1}{10}.\frac{1}{2^n}.$$
4. p est un entier naturel non nul.
Déterminer un entier n_0 tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \Rightarrow |u_n - a| < \frac{1}{10^p}.$$
En déduire une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

(B)

Question 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\times$ par : $t \mapsto \dfrac{t^2}{e^t - 1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
On notera g ce prolongement.
2. (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \quad g'(t) = \frac{t.e^t}{(e^t - 1)^2} h(t)$$
(c) Etudier les variations de g. Montrer que g passe par un maximum absolu M égal à $a(2 - a)$.
3. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de g et sa tangente au point d'abscisse zéro.

Question 2

1. Montrer la convergence des intégrales suivantes :
$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}\,dt \qquad \text{pour } p \text{ entier naturel non nul}$$
$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt}\,dt \qquad \text{pour } p \text{ entier naturel}$$
2. k étant un entier naturel, on pose pour tout x réel positif
$$I_k(x) = \int_0^x t^2 e^{-(k+1)t}\,dt$$
et l'on note I_k la limite quand x tend vers $+\infty$ de $I_k(x)$.
Calculer $I_k(x)$ à l'aide d'intégrations par parties et en déduire I_k.
3. n est un entier naturel non nul, on pose, pour tout x réel positif,
$$J_n(x) = \int_0^x g(t) e^{-nt}\,dt$$
et l'on note J_n la limite de $J_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que :
$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{M}{n}.$$
En déduire la limite de J_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + g(t)e^{-nt}.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} I_k + J_n$$

puis que

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$$