ISCID 1988 Option technologique

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
Le problème est constitué de cinq parties d'inégales importance; les quatre premières parties sont indépendantes, excepté la question **IV** IV8.
On rappelle que ln désigne le logarithme népérien et exp la fonction exponentiellle (on écrire $\exp(x)$ ou e^x).

I. On considère un nombre réel $\alpha > 1$, et f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{lcl}]-\infty, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \alpha x - 1 + (1-x)^\alpha = \alpha x - 1 + \exp\left[\alpha \ln(1-x)\right] \end{array}$$

(1) Etudier les variations de f.

(2) Calculer les limites de :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x); \quad \lim_{x\to -\infty} f(x); \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)$$

(3) Tracer, dans un repère orthonormé, le graphe de f pour la valeur de $\alpha = 1,2$.
Préciser la direction asymptotique de la branche infinie et la tangente au graphe au point d'abscisse $x = 1$.

(4) En déduire, pour toute valeur $\alpha > 1$, l'inégalité :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad (1-x)^\alpha \geqslant 1 - \alpha x.$$

II. Etant donnés deux entiers N et p au moins égaux à 2, on pose :

$$u_N = \sum_{k=1}^{N-1} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + (N-1)^p.$$

(1) Pour $k \in \mathbb{N}^\times$, montrer les inégalités :

$$\int_{k-1}^{k} x^p dx \leqslant k^p \leqslant \int_{k}^{k+1} x^p dx.$$

(2) En déduire que : $\int_0^{N-1} x^p dx \leqslant u_N \leqslant \int_1^N x^p dx.$

(3) Montrer que : $\dfrac{(N-1)^{p+1}}{p+1} \leqslant u_N \leqslant \dfrac{N^{p+1}}{p+1}.$

III. Une urne contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tire avec remise deux jetons. On note Y le plus grand des numéros tirés et Z le plus petit.

(1) Ecrire, sous la forme d'un tableau à double entrée. La loi conjointe du couple (Y, Z) et les lois marginales de Y et Z.

(2) Calculer les espérances de Y et Z, les variances de Y et Z et la covariance de (Y, Z); les résultats seront écrits à l'aide de fractions irréductibles.

(3) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

IV. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N ($N \geqslant 2$); on tire <u>avec remise</u> p jetons ($p \geqslant 2$). On note Y le plus grand des numéros tirés, Z le plus petit et X_i le numéro du $i^{ième}$ jeton tiré ($1 \leqslant i \leqslant p$).

(1) Quelle est la loi de X_i ?

(2) Montrer que $P(Y \leqslant k) = P(X_1 \leqslant k) \times P(X_2 \leqslant k) \times \cdots \times P(X_p \leqslant k)$.

(3) Montrer que $P(Y = k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.

(4) En déduire que $P(Y = k) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^p - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^p$.

(5) De même, calculer $P(Z \geqslant k)$ et en déduire que

$$P(Z = k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^p - \left(\frac{N-k}{N}\right)^p$$

(6) Montrer que l'espérance de Y (notée $E(Y)$) est égale à

$$E(Y) = N^{-p} \sum_{k=1}^{N} \left[k^{p+1} - (k-1)^{p+1} - (k-1)^p\right] = N - N^{-p} \sum_{k=1}^{N} k^p.$$

(7) De même, montrer que :

$$E(Z) = 1 + N^{-p} \sum_{k=1}^{p} k^p.$$

(8) En déduire à l'aide du II3, que

$$N.\frac{p}{p+1} \leqslant E(Y) \leqslant N - \frac{N}{p+1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{p+1}$$

Puis, à l'aide I4

$$N.\frac{p}{p+1} \leqslant E(Y) \leqslant N.\frac{p}{p+1} + 1$$

(9) Montrer de même que

$$\frac{N}{p+1} \leqslant E(Z) \leqslant \frac{N}{p+1} + 1$$

V. Les taxis d'une grande métropole sont tous dotés d'un numéro compris entre 1 et N. Au cours d'une promenade, j'ai relevé les numéros de 10 taxis :

3 293	6 022	5 870	4 485	3 608
7 998	129	6 870	4 542	8 214

A combien estimez-vous le nombre N de taxi ?