ISCID 1989 Option économique

PROBLEME 1

1. Soit f, la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $f(x) = -\ln(\frac{1}{x} - 1)$

   (a) Etudier la variation et tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm). On montrera que le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie.

   (b) Montrer que f définit une application bijective, pour laquelle on précisera les ensembles de départ, et d'arrivée, et déterminer sa réciproque g, dont on tracera la courbe représentative sur le même graphique que (C).

   (c) Montrer que, dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $x = g(x)$ admet une unique solution α.

2. On définit la suite numérique u par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

   (a) En déduire de 1b que la suite u est croissante et majorée. Conclure.

   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

   (c) En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

   (d) Calculer une valeur approchée à 10^{-6} près de α, en indiquant l'algorithme utilisé (soit par le programme de calcul en language BASIC, soit par un organigramme).

PROBLEME 2

Dans ce problème, $x \mapsto [x]$ désigne la fonction partie entière des nombres réels.

1. Soient $p \in]0, 1[$ et f, la fonction numérique d'une variable réelle telle que :

   $$f(x) = [x + p]$$

   Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 3 cm)

2. Soient U, une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$, et $X = [U + p]$, où $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

3. Soient $(U_1, U_2, ..., U_n, ...)$ et $(V_1, V_2, .., V_n, ...)$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Posons :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \left[U_n + \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad Y_n = \left[V_n + \frac{1}{6}\right]$$

(a) Montrer que la variable aléatoire Z_n, définie pour $n \in \mathbb{N}^\times$ par :

$$Z_n = 1 - (1 - X_n)(1 - Y_n)$$

est une variable aléatoire de Bernouilli, dont on calculera le paramètre. En préciser l'espérance et la variance.

(b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de : $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

(c) Décrire une épreuve aléatoire concrète réalisant le modèle mathématique présenté dans le 3

PROBLEME 3

On considère la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs colonnes suivants :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que :

$$\begin{aligned} A(K_1 + K_2) &= K_1 + K_2 \\ A(K_1 - K_2) &= K_1 - K_2 \\ AK_3 &= K_3 \end{aligned}$$

2. Soient λ_1, λ_2, λ_3 les trois valeurs propres de A trouvées au 1. Vérifier que :

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = 0$$

3. En développant l'égalité précédente, et en la transformant, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

4. Soit P le polynôme réel défini par :

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 3, on sait qu'existent a_n, b_n, c_n réels, et Q_n, un polynôme réel, uniques, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = Q(x)P(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$$

(a) En affectant à x successivement trois valeurs réelles judicieusement choisies, déterminer un système de trois équations linéaires à 3 inconnues dont a_n, b_n et c_n sont les solutions. En déduire leurs valeurs respectives.

(b) Ayant remarqué que $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$, pour tout entier naturel n, déduire du 4a l'expression de A^n en fonction de A^2, A et I, puis expliciter A^n.