ISCID 1989 Option technologique

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

EXERCICE 1

Soient les matrices carrées d'ordre 2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

2. (a) Montrer que Q est inversible et calculer Q^{-1}.
   (b) Calculer $Q^{-1}AQ$.

3. En utilisant les deux questions précédentes, calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
   Vérifier qu'il existe λ réel et J matrice carrée d'ordre 2, indépendants de n, tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$A^n = \lambda^n (I + nJ)$$

EXERCICE 2

On considère une suite infinie de tirages à pile ou face mutuellement indépendants. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est un nombre réel p fixé de $[0, 1]$.
Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire S_n :

$$S_n = \text{nombre de "piles" obtenu au cours des } n \text{ premiers tirages}$$

1. (a) Quelle est la loi de S_n ? Que valent son espérance et sa variance ?
   (b) En déduire : $E(S_n^2)$, $\quad E\left(\left(\dfrac{S_n}{n}\right)^2\right)$
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\left(\left(\dfrac{S_n}{n}\right)^2\right)$

2. Soit $T_n = \exp\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ (ainsi T_n vaut $e^{\frac{k}{n}}$ lorsque S_n vaut k)
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$E(T_n) = (p.e^{\frac{1}{n}} + 1 - p)^n$$

   (b) Montrer avec soin que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = e^p$
   (on étudiera d'abord $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln E(T_n)$)
   (c) On pose maintenant $E(T_n) - 1 = A_n(p)$ (p est toujours un réel de $[0, 1]$)
   Justifier que A_n est un polynôme de la variable p de degré n et une fonction strictement croissante sur $[0, 1]$.
   Tracer dans un même repère orthonormé (unité = 10 cm) les graphiques de A_1, A_2, A_3

PROBLEME

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^3}{2} \end{cases}$

1. Soit f l'application $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \dfrac{x^3}{2} \end{array}$

   (a) Déterminer les variations de f sur $[0,1]$.

   (b) Montrer que :

   - Pour tout n entier, U_n appartient à $]0,1]$.
   - La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2. On pose, pour tout x de $[0,1]$: $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 - \dfrac{x}{2}$ et $h(x) = g(x) - \dfrac{3x^2}{8}$

   (a) Calculer $g'(x)$, $g"(x)$, $h'(x)$, $h"(x)$.
   Etudier le signe de $g"(x)$ et celui de $h"(x)$, lorsque x appartient à $[0,1]$.

   (b) Déterminer les variations de g et h sur $[0,1]$ (<u>graphiques non demandés</u>)

   (c) A l'aide du 2b, montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a les deux relations suivantes :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{3x^3}{8}, \quad \exists \varphi(x) \in [0, \frac{3x}{8}], \text{ tel que } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + x\varphi(x)$$

3. (a) Montrer que pour tout réel t de $[0,1]$, pour tout entier $n \geqslant 1$, :

$$f(\frac{t}{\sqrt{n}}) - \frac{t}{\sqrt{n+1}} = \frac{t}{n^{3/2}}\left[\frac{1-t^2}{2} - \varphi(\frac{1}{n})\right]$$

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$f(\frac{1}{\sqrt{n}}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad f(\frac{1}{2\sqrt{n}}) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

4. On pose : pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

   et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k.$$

   (a) Exprimer v_n en fonction de u_n seulement. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   (b) En <u>admettant</u> que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^2 = 1$.
   Conclure que u_n admet un équivalent simple, à préciser, quand n tend vers $+\infty$.

5. (a) Compléter le tableau suivant :

n	u_n	$\sqrt{n}u_n$
1	$0,5$	$0,5$
2	$0,4375$	$0,61872$
10		
25		
100		

(les calculs seront effectués avec une calculatrice; on inscrira dans le tableau les valeurs arrondies à 10^{-5} près, au plus proche, des résultats affichés)

(b) Donner une valeur de n pour laquelle $u_n < \dfrac{1}{1000}$.