ISCID 1990 Option économique

EXERCICE 1 : Analyse

1. Etude d'une suite : soit a un réel strictement positif donné.

   (a) Démontrer que les données :

   $$\text{" } u_0 > 0 \text{ et pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \text{ "}$$

   permettent de définir une suite u.

   (b) Calculer $u_{n+1} - \sqrt{a}$. En déduire que, pour $n \geqslant 1$, u_n est minoré par $\sqrt{a}$.

   (c) Etudier le sens de variations de la suite u.

   (d) Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

   (e) Déterminer l'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox), de la tangente au point d'abscisse u_n à la parabole d'équation $y = x^2 - a$.
   Interpréter géométriquement la suite u.

2. Algorithme de calcul de la racine carrée de a :

   (a) A l'aide de la calculatrice, déterminer les six premiers termes de la suite u (On prendra $u_0 = E(\frac{a}{2})$, où E est la fonction "partie entière"), pour $a = 2$, $a = 25$, $a = \pi$.

   (b) Ecrire, en Turbo-Pascal, un programme qui reçoit la donnée du réel a ($a > 0$), calcule les termes de la suite u correspondante et affiche à l'écran la valeur approchée de sa limite que permet la précision de la machine utilisée.

EXERCICE 2 : Calcul matriciel

Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$i = (1, 0, 0) \quad j = (0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 1)$$

1. Montrer que $(i, i + j, i + j + k)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

   $$\begin{array}{ccccc} f(i+j+k) & = & 0.(i+j+k) & = & 0 \\ f(i+j) & = & 2.(i+j) & = & 2i+2j \\ f(i) & = & (i+j)+2i & = & 3i+j \end{array}$$

   Déterminer la matrice A de f dans la base canonique et sa matrice A' dans la base $(i + j + k, i + j, i)$

3. A l'aide de A', déterminer très simplement les valeurs propres de f, et les vecteurs propres associés.
   f est-elle inversible ? diagonalisable ?

4. Montrer que les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent et en déduire $(A')^n$ en fonction de J, K et n, où $n \geqslant 1$.
   Déterminer les coefficients de la matrice A^n.

PROBLEME

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{(\exp(x)+1)^2},$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

A. (1) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
Etudier ses variations et ses limites à l'infini.

(2) Etudier la concavité de f.
On montrera que l'équation :

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

admet deux solutions opposées.

(3) Déterminer les asymptotes au graphe e f.
Montrer que celui-ci admet un axe de symétrie.
Déterminer les coordonnées des points d'inflexion et l'équation de la tangente en ces points.
Tracer soigneusement la courbe et les droites précédentes dans un repère orthonormé (unité 6 cm; intervalle $[-2, 2]$)

B. (1) A l'aide d'un changement de variable simple, calculer $\int\limits_0^x f(t)dt$.
Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale impropre $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$.
En déduire que f est la densité d'une variable aléatoire réelle continue notée X.

(2) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} (t^2.t).f(t)$.
En déduire la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} t.f(t)dt$.
(on ne cherchera pas à en déterminer la valeur).
Montrer que la v.a.r X admet une espérance, qu'on déterminera.

(3) Soit F la fonction de répartition de X.
Montrer que pour tout x réel, on a : $F(x) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(x)+1}$.
(On pourra commencer par le cas $x > 0$, et utiliser le calcul B1.
Etudier cette fonction.
Quelles remarques peut-on faire quant à son graphe (dont on donnera l'allure) ?

(4) Soit la v.a.r $Y = \exp X$.
Déterminer $P(Y \leqslant y)$ (distinguer selon le signe de y).
Représenter graphiquement la fonction de répartition de Y, notée G, et sa densité, notée g.
La v.a.r Y admet-elle une espérance ?