ISCID 1990 Option générale

(I)

Dans une boite, il y a 9 boules : quatre boules noires et cinq boules blanches.
On effectue un tirage d'une boule au hasard puis, sans remettre la boule tirée, on fait un second tirage d'une boule.
On note :

X la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le premier tirage est noir et la valeur 1 si le premier tirage est blanc
Y la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le second tirage est noir et la valeur 1 si le second tirage est blanc.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer, pour $(i,j) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$, la probabilité $p_{i,j}$ de ($X = i$ et $Y = j$).
   Dresser le tableau à double entrée donnant la loi conjointe du couple (X,Y) et les lois marginales de X et Y.
3. Donner la loi de la variable aléatoire Z égale au produit XY et la valeur de $E(Z)$ son espérance.
4. Calculer la covariance du couple (X,Y).
   En déduire $V(X+Y)$ la variance de la variable aléatoire $X+Y$ et $r_{X,Y}$ le coefficient de corrélation du couple (X,Y).

(II)

Question 1) Soit la matrice A_4 suivante de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}^{\times}$$

1. Calculer une réduite de Gauss de A_4.
2. En déduire
   (a) que l'ensemble des valeurs de a réel positif non nul pour lesquelles A_4 n'est pas inversible est l'ensemble des solutions de l'équation $z^4 - 3z^2 + 1 = 0$ et vérifier que, quel que soit a élément de E, la valeur absolue de a est inférieure à 2.
   (b) les valeurs propres de la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 2) a est dans cette question un réel supérieur ou égal à deux.

1. Etudier rapidement les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ par $x \mapsto a - \dfrac{1}{x}$.
   En déduire que la restriction e f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$ réalise une bijection de I sur J un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

2. Soit la suite (p_n) donnée par :

$$p_0 = a \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = a - \frac{1}{p_n}$$

Montrer qu'elle est monotone, convergente, de limite L à préciser.
Que peut-on dire de la suite si a est inférieur ou égal à -2 ?

Question 3) Soit la matrice A_n suivante de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & a & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}^{\times}$$

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss sans permutation de lignes pour calculer une réduite de cette matrice et l'on considère la suite des éléments diagonaux p_k successivement obtenus ($k \in \{0, 1, .., n-1\}$).
   On a $p_0 = a$. Calculer p_1 et montrer que si p_k est non nul, on a :

$$p_{k+1} = a - \frac{1}{p_k}$$

2. Déduire de la question 2 que si la valeur absolue de a est strictement supérieure ou égale à 2, la matrice A_n est inversible et admet une réduite de Gauss à pivots de valeur absolue supérieur à un.

(III)

Question 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \quad \text{si} \quad t \neq 1 \quad \text{et} \quad g(1) = \frac{1}{2}$$

1. Calculer la limite de $g(t)$ quand t tend vers 1.
2. Montrer que g admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^{\times}$.
   Soit G la primitive de g sur $\mathbb{R}_+^{\times}$, nulle pour $t = 1$; donner le développement limité de G à l'ordre 1 au voisinage de $t = 1$.

Question 2)

1. Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+^{\times} \backslash \{1\}$ par : $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$.
   Calculer $H(x)$ et montrer que $H(x)$ admet une limite quand x tend vers 1.
2. Soit la fonction K définie sur $\mathbb{R}_+^{\times} \backslash \{1\}$ par

$$K(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

   Exprimer $K(x)$ à l'aide de $G(x^2)$, $G(x)$ et $H(x)$. En déduire la limite de $K(x)$ quand x tend vers 1.

Question 3) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \quad \text{si} \quad x \neq 1, \quad \text{et} \quad F(1) = \ln 2.$$

1. La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^\times$
2. Calculer $F'(x)$ la dérivée de $F(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$ et sa limite quand x tend vers 1. Que peut-on en déduire ?
3. Démontrer l'encadrement suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}, \quad \frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln x}$$
4. Montrer que la fonction F admet en $x = 0$, un prolongement par continuité et que son prolongement $\widehat{F}$ est dérivable en $x = 0$.
Etudier les variations de $\widehat{F}$. Préciser la nature de la branche infinie de (C) la courbe représentative de F dans un repère orthogonal (O, i, j)
5. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{F'(x) - 1}{x - 1}$. En déduire que F' est dérivable en $x = 1$. Ecrire le développement limité de F au voisinage de $x = 1$ à l'ordre 2. Préciser la position de la courbe C par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.
6. Calculer par la méthode des rectangles une valeur approchée de $F(2)$ en utilisant un équipartage de $[2, 4]$ de pas $0, 2$.
7. Tracer la courbe C et sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.