ISCID 1990 Option technologique

EXERCICE 1

Trois personnes A_1, A_2, A_3 entrent en même temps dans une banque qui ne comporte que deux guichets. A_1 et A_2 sont servis de suite tandis que A_3 doit attendre qu'un guichet se libère pour être servi.
On suppose que le temps nécessaire pour servir le client A_i $(i = 1, 2, 3)$ est une variable aléatoire X_i suivant une loi géométrique de paramètre p, p étant un réel élément de $]0, 1[$.
On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes.
On appelle Y le temps qui s'est écoulé entre l'arrivée des trois personnes et le moment où A_3 peut accéder à un guichet grâce au départ de A_1 ou A_2. On désigne par Z le temps écoulé entre l'arrivée et le départ de A_3

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $(X_i > k)$, k appartenant à $\mathbb{N}^\times$
2. Préciser l'espérance de X_i.
3. Exprimer l'évènement $(Y > k)$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer $P(Y > k)$.
   En déduire la probabilité de l'évènement $(Y = k)$.
4. Reconnaitre la loi de Y.
5. Calculer l'espérance mathématique de Z.

EXERCICE 2

Un pays est divisé en trois zones numérotées 1, 2, 3 et l'effectuf de sa population ne change pas au cours du temps.
Soit la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

le coefficient $a_{i,j}$ de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne de la matrice A est la proportion de l'effectif de la zone j qui émigre chaque année vers la zone i un an plus tard.
On désigne par U_0, V_0, W_0 les effectifs initiaux respectifs des populations des zones 1, 2, 3 et par U_n, V_n, W_n les effectifs de ces mêmes zones n années plus tard.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.
2. En déduire que $X_n = A^n X_0$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.
3. Déterminer les valeurs propres de la matrice A ainsi que les sous-espaces propres.
4. En déduire que A peut s'écrire sous la forme PDP^{-1}, D étant une matrice diagonale et P une matrice inversible à préciser.
5. Déterminer A^n pour tout n élément de $\mathbb{N}$.
6. Calculer U_n, V_n, W_n en fonction de n, U_0, V_0, W_0.
7. Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de U_n, V_n, W_n.
   On remarquera que ces limites sont indépendantes de la répartition initiale de la population dans les trois zones.

EXERCICE 3

1. On définit la fonction f sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$$

   C est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 10 cm)

   (a) Montrer que $f(x) = f(1-x)$ pour tout x élément de $]0,1[$.
   En déduire que C présente un axe de symétrie.

   (b) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue g sur $[0,1[$.

   (c) Etudier la dérivabilité de g et calculer la dérivée.

   (d) Déterminer le sens de variation de f.

   (e) Tracer la courbe C.

   (f) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par C et l'axe des abscisses.

2. x_1 et x_2 sont deux réels strictement positifs tels que $x_1 + x_2 = 1$.
   A l'aide de la question 1, montrer que :

$$x_1\ln x_1 + x_2\ln x_2 \geqslant \ln\frac{1}{2}$$

   et que

$$x_1\ln x_1 + x_2\ln x_2 = \ln\frac{1}{2} \text{ si et seulement si } x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

3. On se propose de généraliser le résultat de la question 2.
   Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ telle que φ' soit croissante.

   (a) Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\varphi(a)\right)$$

   a et x étant deux réels strictement positifs quelconques.
   A cet effet, on pourra étudier le sens de variation de la fonction :

$$h : x \mapsto \varphi(x) + \varphi(a) - 2\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

   (b) Retrouver l'inégalité démontrée à la question 2.

   (c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel non nul n et quels que soient les réels strictement positifs x_1, $x_2, ..., x_n$:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_i)$$

   (d) Justifier l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\ln x_i \geqslant \ln\frac{1}{n},$$

   n étant un entier non nul et x_1, $x_2, .., x_n$ des réels strictement positifs dont la somme vaut 1.