ISCID 1991 Option économique

Matériel autorisé	:	UNE calculatrice personnelle
matériel fourni	:	une feuille de papier milimétré

Les trois exercices sont indépendants.

Les qualités de clarté et de lisibilité de la copie, la rigueur et la concision des justifications et des calculs, seront valorisés.

EXERCICE 1 : Analyse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2),$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. Etude d'une fonction :
   Etudier la fonction f.
   Préciser les points d'inflexions de sa courbe représentative (C).
   Tracer, dans un repère orthonormé (unité 4 cm), la courbe (C) et la droite d'équation $(y = x)$.

2. Etude d'une équation :
   Montrer que l'équation $(f(x) = x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution et une seule, notée a;
   Pour cela, on étudiera, sur $\mathbb{R}_+$, le sens de variation de la fonction g, où $g = f - \mathrm{Id}$, c'est-à-dire :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = f(x) - x.$$

   Vérifier que : $0,6 < a < 0,7$

3. Etude d'une suite :
   On définie une suite u par son premier terme $u_0 = 0,6$ et par la relation de récurrence :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrer que si u_n tend vers une limite l, alors : $l = a$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0,6 \leqslant u_n \leqslant 0,7$.

   (c) Représentez graphiquement les premiers termes de la suite u.

   (d) Majorer $|f'|$ sur l'intervalle $[0,6; 0,7]$.
   En déduire que, pour tout naturel n, on a

   $$|u_{n+1} - a| \leqslant 0,86\,|u_n - a|$$

   puis que

   $$|u_n - a| \leqslant (0,1).(0,86)^n$$

   (e) Etudier la convergence de la suite u.

4. Calculer approché de la limite :

   (a) Déterminer un rang N_1 à partir duquel u_n, pour $n \geqslant N_1$, est une valeur approchée de a, à $0,001$ près.
   Donner la valeur de u_{N_1} fournie par la calculatrice.

   (b) Ecrire, en Turbo-Pascal, un programme qui

- déclare la fonction f.
- calcule les N premiers termes de la suite u (pour une valeur de N laissé au choix de l'utilisateur)
- affiche la valeur approchée de a ainsi obtenue.

5. Accélération de la convergence vers a :
Soit v la suite définie par son premier terme : $v_0 = 0,6$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = h(v_n)$$

avec h la fonction $h = k.g + \mathrm{Id}$, où k est une constante positive donnée et égale à

$$\frac{-2}{g'(0,6) + g'(0,7)}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = k.g(v_n) + v_n$$

et, puisque $g(x) = f(x) - x$, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= k.(f(x) - x) + x \\ &= kf(x) + (1-k)x. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que si v_n tend vers une limite l, alors : $l = a$.

   (b) Déduire du signe de $h"$ les variations de h' sur $[0,6; 0,7]$.
   En déduire que :
   $$\forall x \in [0,6; 0,7], \quad |h"(x)| \leqslant 0,0056.$$

   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in [0,6; 0,7], \quad h(x) \in [0,6; 0,7]$$

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$|v_n - a| \leqslant (0,1).(0,0056)^n$$
   En déduire un rang N_2 à partir duquel v_n, pour $n \geqslant N_2$, est une valeur approchée de a à $0,000\,001$ près.
   Donner la valeur de v_{N_2} fournie par la calculatrice.

6. Convergence et valeur approchée d'une intégrale impropre :

   (a) Montrer que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale impropre convergente : pour cela, on pourra remarquer que :
   $$\forall u \geqslant 0, \quad \exp(u) \geqslant u,$$
   et ainsi majorer $\exp(-x^2)$ pour $|x|$ suffisamment grande.

   (b) On rappelle que la densité Φ de la loi normale centrée réduite est donnée par :
   $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
   A l'aide d'un changement de variables, calculer $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

EXERCICE 2 : Calcul matriciel

Le but de l'exercice est de calculer la puissance $n^{ième}$ de la matrice A, où A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire réelle X_n définie sur un espace probabilisé.
On suppose que, pour tout entier naturel n :

- X_n suit une loi de Bernouilli de paramètre p_n,
- les probabilités conditionnelles suivantes sont constantes :

$$\begin{array}{lll} P(X_{n+1} = 1/X_n = 1) = 0,3 & \text{si} & P(X_n = 1) \neq 0 \\ P(X_{n+1} = 1/X_n = 0,9 & \text{si} & P(X_n = 0) \neq 0 \end{array}$$

1. Montrer que, si $0 < p_n < 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ 1 - p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ 1 - p_n \end{pmatrix}$$

   Vérifier cette formule pour $0 \leqslant p_n \leqslant 1$.

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de n et de p_0.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ 1 - p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{pmatrix}$$

4. En considérant successivement les cas $p_0 = 1$, puis $p_0 = 0$, calculer les coefficients de la matrice A^n

EXERCICE 3 : Probabilités

On considère une urne de taille N ($N > 1$) contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 \leqslant r < N$).
dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de TOUTES les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.
Le but de l'exercice est de déterminer

- la loi de X (c'est-à-dire la loi du "temps d'attente de la $r^{ième}$ boule blanche")
- l'espérance et la variance de X.

1. (a) Traiter le cas : $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$

2. Dans le cas $r = 1$ (N quelconque dans $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$), reconnaitre la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.

3. <u>Etude du cas général</u> : $(1 < r < N)$

   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs.
   Déterminer la probabilité pour qu'au cours des $k - 1$ premiers tirages soient apparue $r - 1$ boules blanches (et donc, $k - r$ boules noires).
   En déduire la valeur de $P(X = k)$, c'est-à-dire la probabilité pour que la $r^{ième}$ (et dernière) boule blanche apparaisse au $k^{ième}$ tirage.

(c) Vérifier, après simplifications, que $P(X = k) = \dfrac{C_{r-1}^{k-1}}{C_N^r}$., où la notation C_n^p désigne le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, avec :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{k=r}^{N} C_{k-1}^{r-1}, \text{ puis } \sum_{k=r}^{N} C_k^r \text{ puis } \sum_{k=r}^{N} C_{k+1}^{r+1}$$

(d) On rappelle que :

$$nC_{n-1}^{p-1} = pC_n^p.$$

En déduire que $E(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.

(e) De même, calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.