ISCID 1991 Option technologique

EXERCICE 1

A. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(1) a. Exprimer AV_1 pour $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ en fonction de V_1.

b. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

(2) Soit la matrice P, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a. Prouver que P est inversible et calculer la matrice P^{-1}.

b. Calculer la matrice $P^{-1}AP$

(3) On donne les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer JK et KJ.
Calculer J^n et K^n pour tout entier naturel n.
Ecrire B à l'aide de J et de K; en déduire B^n pour tout entier naturel n.

b. Prouver, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5^n - (6n-8)2^n & 5^n + (3n-1)2^n & 5^n - (\frac{3}{2}n+1)2^n \\ 4 \times 5^n - (6n+4)2^n & 4 \times 5^n + (3n+5)2^n & 4 \times 5^n - (\frac{3}{2}n+4)2^n \\ 4 \times 5^n + (12n-4)2^n & 4 \times 5^n - (6n+4)2^n & 4 \times 5^n + (3n+5)2^n \end{pmatrix}$$

B. Un jeton est placé au hasard, c'est-à-dire avec équiprobabilité, sur l'une des trois cases d'une planchette numérotées de gauche à droite $1, 2, 3$.
Le déplacement du jeton sur la planchette est régi par l'expérience suivante :

- On tire une boule d'une urne contenant quatre boules blanches et une boule noire.
  - Si la boule tirée est blanche, on déplace le jeton de deux cases vers la droite, ou, si ce déplacement est impossible, on laisse le jeton où il se trouve.
  - Si la boule tirée est noire, on déplace le jeton d'une case vers la gauche, ou, si le déplacement est impossible, on laisse le jeton là où il se trouve.
- On remet dans l'urne la boule tirée.

Pour n entier naturel non nul, on note X_n la variable aléatoire indiquant le numéro où se trouve le jeton après n tirage dans l'urne, X_0 désigne la variable aléatoire indiquant le numéro de la case où se trouve le jeton avant le premier tirage dans l'urne.

(1) Préciser la loi de X_0; calculer $E(X_0)$ et $V(X_0)$.

(2) Pour n entier naturel, on note :

$$a_n = P(X_n = 1), \quad b_n = P(X_n = 2), \quad c_n = P(X_n = 3), \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

a. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \dfrac{1}{5} A U_n$, où A est la matrice définie dans la partie A.

b. Exprimer U_n en fonction de A, n et U_0.

c. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n et trouver les limites a, b et c des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Déterminer la probabilité qu'à l'issue des n premiers tirages dans l'urne le jeton ait été déplacé une fois et une seule.

EXERCICE 2

A. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 10e^{-0,1x} \ln(1 + e^{0,1x}) \\ g(x) &= \frac{10}{e} \ln(1 + e^{0,1x}) \end{aligned}$$

(1) Etude de f :

a. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b. Prouver que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

En déduire le signe de $f'(x)$.

c. Etudier les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

(2) Etude de g :

a. Déterminer le sens de variation de g.

b. Etudier les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

(3) On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g.

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g.

b. Tracer C_f et C_g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j},)$

$$\begin{array}{rll} \text{unités :} & 0{,}5 \text{ cm sur} & (O, \vec{i}) \\ & 1 \text{ cm sur} & (O, \vec{j}) \end{array}$$

(On placera les points C_f et C_g d'abscisses $5k$ pour k entier variant de -5 à 5)

B. Sur $\mathbb{R}_+$, f est la fonction de demande d'un bien sur un marché ($f(x)$ est le prix qu'accepte de payer un consommateur en fonction des quantités x demandées).
Sur $\mathbb{R}_+$, g est la fonction d'offre de ce même bien ($g(x)$ est le prix proposé par un producteur en fonction des quantités x offertes).
Le marché est dit en équilibre lorsque l'offre est égale à la demande.

(1) Déterminer la quantité X_0 et le prix p correspondant à l'équilibre du marché.

(2) Le prix du bien étant fixé à p, le consommateur achète x_0 unités au prix p; la différence entre ce qu'il était prêt à payer et ce qu'il paie réellement est représentée par l'aire de la partie du plan limitée par C_f, les droites d'équations

$$x = 0, \quad x = x_0, \quad y = p.$$

Cette aire est appelée surplus du consommateur SC.

a. A l'aide du changement de variable $t = e^{0,1x}$, établir que :

$$\text{SC} = 100 \int_1^e \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt - 10f(10).$$

b. Prouver qu'il existe a et b réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \frac{1}{t(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t}.$$

c. Donner la valeur exacte de SC et sa valeur arrondie à 10^{-2} près au plus proche.

(3) On définit de façon analogue la notion de surplus du producteur SP, aire de la partie du plan limité par C_g, les droites d'équations

$$x = 0, \quad x = x_0, \quad y = p.$$

a. Soit n un entier naturel non nul; prouver que pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$\frac{10}{n} g\left(\frac{10(k-1)}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{10(k-1)}{n}}^{\frac{10k}{n}} g(x)dx \leqslant \frac{10}{n} g\left(\frac{10k}{n}\right)$$

b. On pose $u_n = \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{10k}{n}\right)$.

Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n + \frac{10}{n}(g(0) - g(10)) \leqslant \int_0^{10} g(x)dx \leqslant u_n.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant \text{SP} - (10g(10) - u_n) \leqslant \frac{100}{ne} \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Utiliser ce résultat pour trouver une valeur approchée de SP à une unité près.

c. Comment suffit-il de choisir n pour avoir :

$$0 \leqslant \text{SP} - (10g(10) - u_n) < 0,01.$$

Ecrire un programme en PASCAL permettant de calculer

$$10g(10) - \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{10k}{n}\right)$$

pour une valeur de n donnée par l'utilisateur du programme.