ISG 1979 Math II

Toutes les questions traitées doivent être référencées avec précision
La présentation ainsi que la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentales
Les tables numériques sont utiles. Les parties A,B,C et D sont strictement indépendantes

A. Les mathématiques financières utilisent constamment les suites arithmétiques et géométriques

I

1. Soit la suite réelle définie par son 1^{er} terme u_1, sa raison r et la relation $u_n = u_{n-1} + r$.
   Etablir l'expression de la somme $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   En déduire la somme $S_1(n)$ des n premiers entiers lorsque $u_1 = r = 1$.
2. Calculer la somme $S_2(n)$ des carrés des n premiers entiers soit, lorsque $u_1 = r = 1$
$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} (u_k)^2.$$
3. Calculer la somme $S_3(n)$ des cubes des n premiers entiers soit, lorsque $u_1 = r = 1$
$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (u_k)^3.$$
4. Calculer les valeurs de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ lorsque $n = 3$.

II

1. Soit la suite réelle définie par son 1^{er} terme v_1, sa raison q et la relation $v_n = v_{n-1} \times q$.
   Etablir l'expression de la somme $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.
   Etudier V_n lorsque $n \to +\infty$.
2. On pose $q = (1+i)^{-1}$ et $v_1 = a(1+i)^{-1}$, a et $i \in \mathbb{R}_+$. Donner en fonction de a, i et n l'expression particulière de V_n.
   En considérant que $i \in]0,1[$ et que V_n est une fonction réelle de n, étudier les variations de cette fonction V_n.

III

1. On donne la suite w_n définie par $w_1 = (1+2i)$, son premier terme, et son terme courant :
$$w_k = k \times (1+2i)^{-2k+3}$$
   Calculer la somme :
$$W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$$
2. On donne $i = 0,1$ et $n = 25$; calculer la valeur de W_n.

B. Le calcul des probabilités fait appel au dénombrement ou calcul combinatoire

I

1. Etablir le nombre de permutations différentes P_n que l'on peut réaliser avec n objets distincts.
   Etablir de même le nombre d'arrangements A_n^p de groupes ordonnés de p objets parmi n distincts disponibles $(p < n)$.

2. Calculer les sommes

$$\begin{aligned} S_1 &= C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{2p+1} + \cdots \\ \text{et } S_2 &= C_n^0 + C_n^2 + \cdots + C_n^{2p} + \cdots \end{aligned}$$

   en précisant rigoureusement l'expression du dernier terme de S_1 et celle du dernier terme de S_2.

3. Démontrer que $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ et en déduire la méthode dite du triangle de Pascal pour déterminer les coefficients du développement du binôme de Newton $(a+b)^n$.
   Construire ce triangle des coefficients depuis $n = 0$ jusqu'à $n = 10$.

II

1. Dans une population supposée infinie, un caractère C peut-être, pour chaque individu la constituant, ou positif ou négatif. C est positif pour la proportion $p = 0,6$ de la solution et négatif pour la proportion $q = 0,4$.
   On choisit n individus dans cette population et l'on convient d'attribuer à chacun une variable x_k prenant la valeur 1 si cet individu k a un caractère C positif et prenant la valeur 0 dans le cas contraire. On note X le nombre d'individus qui, parmi les n choisis, ont un caractère positif.
   Montrer que X s'exprime aisément en fonction des x_k.

2. Etablir l'expression de la probabilité p_k pour $(X = k)$

3. Etablir l'expression de l'espérance mathématique de X $\left(E(X) = \sum p_k x_k\right)$.

4. Sachant que $n = 10$, déterminer les probabilités pour que :
   $X = 10$
   $3 \leqslant X$
   et enfin $X < 2$

C.

I

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant $\Delta(M)$ de cette matrice.

2. Calculer les valeurs propres et donner pour la valeur propre de plus grand module une estimation de l'erreur.

3. Déterminer un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ $(OXYZ)$ de vecteurs unitaires définis par leurs composantes dans $Oxyz$ qui sont vecteurs propres de M.

II

On considère (A) l'anneau non commutatif et unitaire des matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ 0 & a' & d \\ 0 & 0 & a" \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont réels ou complexes

1. Montrer que la matrice A^{-1} de A appartient à l'anneau (A) lorsque A est régulière. On donnera explicitement la condition de régularité de A et l'expression de A^{-1}.
2. A quelle condition nécessaire la matrice A peut-elle être un diviseur de la matrice nulle de (A) ?
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Montrer qu'il existe 3 nombres réels ou complexes u, v, w tels que l'on ait :
$$A^3 = uA^2 + vA + wE$$
où E est la matrice unité de (A).
5. Déterminer les valeurs propres de A et vecteurs propres de A en discutant les différents cas possibles.
6. Montrer que l'on peut déduire de 5 la relation du 4.
7. En supposant les valeurs propres de A distinctes deux à deux, diagonaliser A et en déduire sa transmuée A'.
8. En déduire les expressions A^n et A'^n.

D.

I

1. Calculer l'intégrale $I_{2n+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ où n est entier $\geqslant 0$
(On pourra calculer $I_{2n+1} - I_{2n-1}$)
2. Calculer l'intégrale $I_{2n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2nt}{\sin t} dt$
3. Montrer que I_{2n} a une limite finie quand $n \to +\infty$

II

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t continue sur $[a, b]$ et admettant une dérivée première $\varphi'(t)$ sur $[a, b]$. On suppose que $|\varphi'(t)| < M \quad \forall t$ sur $[a, b]$, M étant indépendant de t. Soient α et β deux nombres tels que $a < \alpha < \beta < b$.
Montrer que si la suite des nombres réels $\varepsilon_n \to 0$ si $n \to +\infty$, l'intégrale $\int\limits_\alpha^\beta [\varphi(t + \varepsilon_n) - \varphi(t)]\, dt$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que les intégrales $\int\limits_\alpha^\beta \varphi(t) \cos nt\ dt$ et $\int\limits_\alpha^\beta \varphi(t) \sin nt\ dt$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.
(On peut poser $t = \dfrac{\pi}{n} + \theta$).
3. Trouver la limite de I_{2n} si $n \to +\infty$

FIN