ISG 1981 Math I

NOTATIONS

E étant un ensemble fini de cardinal n, on désigne par :

- $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E
- $|A|$ le cardinal de A
- $A\backslash B$ l'ensemble $\{x$ tel que $x \in A$ et $x \notin B\}$
- $\mathcal{H}_1$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$
- $[A]$ l'élément de $\mathcal{H}$ défini par : $[A](X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X = A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\mathcal{H}_2$ l'ensemble des applications ε de $(\mathcal{P}(E))^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon(X,Y) \neq 0 & \text{si } X = Y \\ \varepsilon(X,Y) = 0 & \text{si } X \not\subset Y \end{cases}$$

- $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{H}_1$

QUESTION PRELIMINAIRE

Montrer que la famille des $[A]$, où A décrit $\mathcal{P}(E)$, est une base de $\mathcal{H}_1$. $\mathcal{H}_1$ est donc un espace vectoriel de dimension ....
Soit $\mathfrak{B}$ cette base, et h un élément quelconque de $\mathcal{H}_1$; la décomposition de h dans la base $\mathfrak{B}$ vous sera utile pour la suite.

I

Pour tout réel u, on définit l'application

$$\varphi_u \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \to & \mathcal{H}_1 \\ h & \mapsto & \varphi_u(h) = h_u \end{array}$$

par la relation

$$(1) \quad : \quad \left[\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad h_u(A) = \sum_{X \subset A} u^{|A\backslash X|} h(X)\right]$$

1. Montrer que $\varphi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$

> Le but de la partie I est de prouver que
> (1) $\Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad \sum_{X \subset A} (-u)^{|A\backslash X|} h_u(X)\right]$
> On va commencer par le faire dans le cas simple où E n'a que deux éléments a et b (question 2,3,4 et 5)

2. Expliciter la matrice M_u de φ_u relativement à la base ordonnée $([\emptyset],[\{a\}],[\{b\}],[E])$ de $\mathcal{H}_1$ et en déduire que M est inversible.

3. v étant aussi un réel quelconque, calculer $M_u\times\, M_v$.

4. En déduire que l'ensemble des φ_u $(u\in\mathbb{R})$, muni de la loi $\circ$, est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.
Préciser l'élément neutre et l'inverse de φ_u.

5. En déduire l'équivalence cherchée

§ On va maintenant démontrer le cas générale par un raisonnement direct, sans recourir au calcul matriciel

6. A et B étant deux parties de E telles que $A\subset B$, et de cardinaux respectifs p et q; u et v étant deux réels quelconques, établir les égalités suivantes :

   (a)
$$\sum_{X\subset E} u^{|X|}=(u+1)^n$$

   (b)
$$\sum_{A\subset X\subset B} u^{|X\setminus A|}v^{|B\setminus X|}=(u+v)^{q-p}$$

7. Démontrer que $\varphi_u\circ\varphi_v=\varphi_{u+v}$.

8. Conclure.

II

Pour tout $\varepsilon\in\mathcal{H}_2$, on définit l'application

$$\varphi_\varepsilon \quad:\quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \to & \mathcal{H}_1 \\ h & \mapsto & \varphi_\varepsilon(h)=h_\varepsilon \end{array}$$

par la relation

$$(2)\quad:\quad \left[\forall A\in\mathcal{P}(E),\qquad h_\varepsilon(A)=\sum_{X\subset A}\varepsilon(X,A)h(X)\right]$$

On se propose de démontrer que, pour tout $\varepsilon\in\mathcal{H}_2$, il existe dans $\mathcal{H}_2$ un élément ε' unique, associé à ε, tel que

$$(2)\Leftrightarrow\left[\forall A\in\mathcal{P}(E),\qquad h(A)=\sum_{X\subset A}\varepsilon'(X,A)h_\varepsilon(X)\right]$$

1. Il est claire que $\varphi_\varepsilon\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Soit M_ε sa matrice relativement à la base $\mathfrak{B}$. On notera $\alpha_{X,Y}$ le coefficient de M_ε situé à l'intersection de la ligne de $[X]$ et de la colonne de $\varphi_\varepsilon([Y])$.
Montrer que $\alpha_{X,Y}=\varepsilon(Y,X)$.

2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations de $\mathcal{P}(E)$, et σ un élément quelconque de $\mathcal{S}$.

   (a) Montrer que
$$\sigma(\emptyset)\neq\emptyset\Rightarrow\prod_{X\in\mathcal{P}(E)}\alpha_{X,\sigma(X)}=0$$

   (b) Soit A une partie de E à 1 élément. Montrer que
$$\sigma(A)\neq A\Rightarrow\prod_{X\in\mathcal{P}(E)}\alpha_{X,\sigma(X)}=0$$

(c) Calculer le déterminant de M_ε et en déduire que M_ε est inversible.

3. En vous inspirant du **I.**2, donner une méthode plus rapide pour montrer que M_ε est inversible.

4. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices carrées $(\lambda_{X,Y})$ de dimension 2^n, dont les coefficients sont indexés par les couples de $(\mathcal{P}(E))^2$ avec en première composante, l'indice de ligne, et telles que

$$\begin{cases} \lambda_{X,Y} \neq 0 & \text{si} \quad X = Y \\ \lambda_{X,Y} = 0 & \text{si} \quad Y \not\subset X \end{cases}$$

Montrer rapidement que la correspondance de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathfrak{M}$, qui à ε associe M_ε est bijective.

5. On pose $M_\varepsilon^{-1} = (\beta_{X,Y})$ et soit A une partie à $n-p$ éléments de E ($p \in \{0, 1, 2, .., n\}$)
Montrer par récurrence sur p que

$$\begin{cases} \beta_{X,A} \neq 0 & \text{si} \quad X = A \\ \beta_{X,A} = 0 & \text{si} \quad A \not\subset X \end{cases}$$

6. En déduire que $M_\varepsilon^{-1} \in \mathfrak{M}$ et conclure à l'équivalence cherchée.

7. Montrer que $(\mathfrak{M}, \times)$ est un groupe.

> Vous aurez sans doute remarqué que si $\varepsilon(X,Y) = \begin{cases} u^{|Y-X|} & \text{si } X \subset Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
>
> on a : $\varepsilon'(X,Y) = \begin{cases} (-u)^{|Y-X|} & \text{si } X \subset Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

III

A tout élément ε de $\mathcal{H}_2$, on associe l'application $\overline{\varepsilon}$ de $(\mathcal{P}(E))^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\overline{\varepsilon}(X,Y) = \varepsilon(Y,X)$$

Soit alors l'application linéaire

$$\varphi_{\overline{\varepsilon}} \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \rightarrow & \mathcal{H}_1 \\ h & \mapsto & \varphi_{\overline{\varepsilon}}(h) = h_{\overline{\varepsilon}} \end{array}$$

définie par

$$(3) \quad : \quad \left[\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad h_{\overline{\varepsilon}}(A) = \sum_{X \supset A} \overline{\varepsilon}(X,A) h(X) \right]$$

1. Comparer $M_{\overline{\varepsilon}}$ et M_ε.

2. Montrer que l'ensemble $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ des $M_{\overline{\varepsilon}}$, muni de la multiplication, est un groupe isomorphe à $(\mathfrak{M}, \times)$.

3. En déduire que

$$(3) \Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad h(A) = \sum_{X \supset A} \overline{\varepsilon}(X,A) h_{\overline{\varepsilon}}(X) \right]$$

IV

Soit $\{\Omega_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de n ensembles finis, $(n \neq 0)$, et E l'ensemble $\{1, 2, .., n\}$. On a alors

$$|\Omega_i \cup \Omega_j| = |\Omega_i| + |\Omega_j| - |\Omega_i \cap \Omega_j|$$

et d'une façon plus générale :

$$(4) \qquad \left[\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad \left| \bigcup_{k \in A} \Omega_k \right| = \sum_{X \subset A} (-1)^{|X|+1} \left| \bigcap_{k \in X} \Omega_k \right| \right]$$

(On convient que les deux membres de l'égalité s'annulent si $A = \emptyset$).

1. Ecrire l'équivalence du **I.** dans le cas où $u = 1$

2. (a) Ecrire (4) sous la forme $f = h_1$, f et h étant deux éléments de $\mathcal{H}_1$ à préciser.

   (b) En déduire que

$$(4) \Leftrightarrow \left[\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad \left|\bigcap_{k\in A} \Omega_k\right| = \sum_{X\subset A} (-1)^{|X|+1} \left|\bigcup_{k\in X} \Omega_k\right|\right]$$

V

Soit E un ensemble de n personnes ($n \geqslant 2$).

Chacine d'entre elles envoie une lettre (et une seule) à l'une quelconque des $n-1$ autres personnes qu'elle choisit au hasard. Les différents choix possibles sont supposés équiprobables.

1. De combien de manières différentes les lettres peuvent-elle être adressés ?

2. Soit $p_{j,n}$ la probabilité pour qu'une personne de E_n, désignée d'avance, reçoive exactement j lettres.

   (a) Calculer $p_{j,n}$.

   (b) Montrer que $p_{j,n} \sim \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^{n-1}$ quand $n \to +\infty$.

   (c) En déduire la limite p_j de $p_{j,n}$ quand $n \to +\infty$.

   (d) Quelles sont l'espérance mathématique et la variance de la loi associée aux p_j ?

3. Si $j > \dfrac{n}{2}$, quelle est la probabilité pour qu'au moins une personne de E reçoive exactement j lettres ?
   Pourquoi le même raisonnement n'est-il pas applicable si $j \leqslant \dfrac{n}{2}$?

4. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on désigne par $f(A)$ la probabilité pour qu'aucune personne de A ne reçoive de lettre. Calculer $f(A)$.

5. Soit $g(A)$ la probabilité pour que l'ensemble des personnes qui ne reçoivent pas de lettre soit exactement A.

   (a) Montrer que, et indiquer de quelle manière, $f(A)$ s'exprime en fonction de certains $g(X)$.

   (b) Ecrire l'équivalence du **III.** dans le cas particulier où $\varepsilon(X,Y) = 1$ si $X \subset Y$ et 0 sinon.

   (c) En déduire $g(A)$.

6. Quelle est la probabilité q pour que chaque personne de E reçoive une lettre ?

Nota : Les questions 1, 2, 3 et 4 du **B.** sont indépendantes de tout ce qui les précède.