ISG 1982 Option économique

I

1. Calculer $\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \int\limits_0^\pi x^n \sin x dx$.

   (a) Calculer A_0.

   (b) Calculer A_1.

   (c) Calculer A_2.

II

On désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies et continues sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
g étant un élément donné de $\mathcal{F}$ et λ un paramètre réel non nul, on se propose de déterminer l'ensemble S_λ des éléments f de $\mathcal{F}$ qui, pour tout $x \in [0, \pi]$, satisfont la relation :

$$(1) \qquad \lambda f(x) + f(0) - (\sin x) \int_0^\pi f(t) \sin t dt = g(x)$$

1. Supposant $\lambda \neq -1$ et $S_\lambda \neq \emptyset$, soit $f \in S_\lambda$.
   Montrer que $f(0)$ est déterminer de manière unique par g.
   En déduire que la relation (1) se réduit alors à la relation plus simple :

$$(2) \qquad \lambda f(x) - (\sin x) \int_0^\pi f(t) \sin t dt = g_\lambda(x), \qquad \text{où } g_\lambda \in \mathcal{F}$$

2. Gardant les mêmes hypothèses, on suppose en outre que $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$.
   Montrer que le réel $\int\limits_0^\pi f(t) \sin t dt$ est alors déterminé de manière unique par g_λ. (On formera l'expression $\int\limits_0^\pi g_\lambda(x) \sin x dx$.)
   En déduire que, dans ce cas, S_λ ne peut contenir qu'un seul élément, que l'on explicitera sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments e_1, e_2, e_3 de $\mathcal{F}$ définis par :

$$\left.\begin{array}{r} e_1(x) = 1 \\ e_2(x) = \sin x \\ e_3(x) = g(x) \end{array}\right\} \text{ pour tout } x \in [0, \pi].$$

3. Vérifier que cet élément appartient bien à S_λ.

4. Montrer que $S_{\frac{\pi}{2}}$ est vide sauf si $\int\limits_0^\pi g_{\frac{\pi}{2}}(x) \sin x dx = 0$
   Cette condition étant supposée remplie, montrer que :

$$S_{\frac{\pi}{2}} = \left\{ f \in \mathcal{F} \quad / \quad f = \frac{-4g(0)}{\pi(\pi+2)} e_1 + \alpha e_2 + \frac{2}{\pi} e_3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

On pourrait d'une manière analogue obtenir S_{-1}. Mais voici une autre façon de traiter ce problème. Il ressort en effet de la forme même de la relation (1) que les éléments de S_λ sont toujours, lorsqu'ils existent, des combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3.
On peut donc se contenter de rechercher les éléments de S_λ dans le sous-espace vectoriel F_g de $\mathcal{F}$ engendré par e_1, e_2, e_3.
On supposera seulement que e_1, e_2, e_3 forment une famille libre de $\mathcal{F}$.

III

Soit φ_λ l'application de F_g dans lui-même définie par :

$$\varphi_\lambda(f) = \lambda f + f(0)e_1 - \left(\int_0^\pi f(t)\sin t dt\right) e_2$$

1. Montrer que φ_λ est une application linéaire de F_g dans F_g.
   Expliciter sa matrice M relativement à la base ordonnée (e_1, e_2, e_3) de F_g.
   On notera : $g(0) = a$ et $\int_0^\pi g(x)\sin x dx = b$)
2. Ecrire la relation (1) sous forme matricielle et en déduire un système d'équations linéaires.
   (On écrira : $f = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$)
3. Retrouver ainsi S_λ lorsque $\lambda \notin \{-1, \frac{\pi}{2}\}$.
4. Déterminer S_{-1}.

IV

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Dans une urne contenant n boules rouges, n boules noires et n boules blanches, on fait un prélèvement aléatoire de n boules.
Les différents prélèvements possibles sont supposés équiprobables. Le prélèvement sera dit "bon" s'il contient au moins une boule de chaque couleur.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge dans ce prélèvement ?
2. Soit p_n la probabilité pour le prélèvement soit bon.
   Calculer p_3, p_5, p_{10} à 10^{-2} près.
3. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement croissante.
4. Pourquoi sait-on dès lors que cette suite converge ?
5. Calculer sa limite.
6. n étant fixé, soit X_k le nombre de bons prélèvements dans une série de k tirages successifs (avec remise).
   Reconnaitre la loi de X_k et indiquer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.