ISG 1983 Option économique Math I

PREMIER PROBLEME

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Pour tout élément L de $\mathcal{L}(E)$ et tout élément f de E, on notera Lf l'image de f par L et $(Lf)(x)$ l'image du réel x par la fonction Lf.

On posera par définition $L^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $i \in \mathbb{N}, \quad L^i = L \circ L^{i-1}$.
On notera D l'élément de $\mathcal{L}(E)$ qui à tout f de E associé à la dérivée f' de f.
Pour tout réel α, on désignera par L_α l'élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$(L_\alpha f)(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

et l'on pourra noter l_α l'élément de E qui à tout réel x associe le réel $e^{\alpha x}$.
On appelle opérateur de dérivation tout élément A de $\mathcal{L}(E)$ pouvant se décomposer sous la forme

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \qquad \text{où} \qquad \left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ a_i \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

A une telle décomposition est associée la fonction polynôme ordinaire P_A définie par

$$P_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit l'élément de $\mathcal{L}(E)$ $K = D^3 - 3D^2 - 9D + 5\,\mathrm{Id}_E$.
On se propose de déterminer le noyau $\widehat{K}$ de K

1. Il est clair que si A et B sont deux opérateurs de dérivation tels qu'il puisse leur être associés deux polynômes P_A et P_B identiques, A et B sont égaux.
   Mais rien n'indique *à priori* qu'un opérateur de dérivation n'ait qu'une seule décomposition suivant les D^i.
   Démontrer que $A = B \Rightarrow P_A = P_B$
   On pourra pour cela utiliser les fonctions l_α.

2. Démontrer que, si A et B sont deux opérateurs de dérivation quelconques.

   (a) $P_{A+B} = P_A + P_B$

   (b) $P_{A \circ B} = P_A P_B$

   (c) $P_{\lambda A} = \lambda P_A$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
   Ainsi, l'addition, la composition et la multiplication par un réel des opérateurs de dérivation sont identiques à l'addition, la composition et la multiplication par un réel des polynômes, et en ont donc les propriétés

3. Décomposer P_K en produit de deux polynômes v et w premiers entre eux, de degrés respectifs 2 et 1.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, on a

$$(D - x\,\mathrm{Id}_E)^n = L_\alpha \circ D^n \circ L_{-\alpha}$$

5. Soient V et W les opérateurs de dérivation définis par

$$P_V = v \qquad \text{et} \qquad P_W = w.$$

Déduire de la question précédente, les noyaux $\widehat{V}$ et $\widehat{W}$ de V et de W.
De chacun d'eux, on donnera une base aussi simple que possible.

6. (a) Montrer que $\widehat{V} + \widehat{W} \subset \widehat{K}$

   (b) Montrer que $\widehat{K} = \widehat{V} \oplus \widehat{W}$ (utiliser 3)
   On a ainsi résolution l'équation différentielle : $y''' + 3y" - 9y' + 5y = 0$

DEUXIEME PROBLEME

Soit f une fonction continue, strictement positive sur un intervalle fermé $[a, b]$ $(a < b)$
$\longrightarrow$Soit M la valeur maximale de f sur $[a, b]$ et x_0 un point de $[a, b]$ tel que $f(x_0)M$

1. Justifier la vraisemblance de la phrase précédée de $\longrightarrow$.

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, justifier l'existence d'un intervalle fermé $I_\alpha \subset [a, b]$, de diamètre $\alpha > 0$, contenant x_0 et tel que

$$x \in I_\alpha \Rightarrow M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on a alors

$$\int_a^b [f(x)]^n \, dx \geqslant \alpha(M - \varepsilon)^n.$$

4. Montrer que

$$\int_a^b [f(x)]^n \, dx \leqslant (b - a)M^n$$

5. Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n \right]^{\frac{1}{n}} = M$$

6. Soit m la valeur minimale de f sur $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^{-n} \right]^{\frac{-1}{n}} = m$$

7. Soient a et b deux réels quelconques avec $a < b$. En utilisant les résultats 5 et 6, discuter suivant les valeurs de a et b la convergence des séries de termes généraux

$$u_n = \frac{e^{nb} - e^{na}}{n(b - a)}$$

et

$$v_n = \frac{n(b - a)}{e^{-na} - e^{-nb}}$$

TROISIEME PROBLEME

Une entreprise utilise une série d'appareils identiques. Chacun d'eux doit-être remplacé dès qu'il tombe en panne, par un appareil neuf.
On note $q(t)$ la probabilité pour qu'un appareil neuf mis en service à l'instant t_0 soit encore en état de marche à l'instant $t_0 + t$.
Le temps étant exprimer en jours, on admet que

$$q(t) = \sqrt{4 - \left(\frac{t}{100}\right)^2} - 1$$

ou, plus exactement, que cette loi est un modèle suffisamment approché d'une réalité statistique observée sur un "échantillon représentatif", ce qui veut dire que si tous les appareils de l'échantillon ont été mis en service à l'instant t_0, $q(t)$ représente à une différence négligeable près, la proportion d'appareils encore en état de marche à l'instant $t_0 + t$.
La borne supérieure θ de l'intervalle de définition de q étant la durée maximale de survie de l'appareil.

1. Etudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction réelle $t \mapsto q(t)$.

2. On subdivise l'intervalle $[0, \theta]$ en n intervalles I_k consécutifs, de même largeur $\Delta t = \dfrac{\theta}{n}$ et tels que

$$I_k = [(k-1)\Delta t, k\Delta t \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

   Déterminer la probabilité ρ_k pour qu'un appareil donne, mis en service à l'instant 0, tombe en panne au cours de la période définie par I_k.

3. Soit T la durée de vie moyenne des appareils, et t_k la durée de vie moyenne des appareils mis en service à l'instant 0 qui tombent en panne au cours de la période définie par I_k.
   Montrer que $t_k \in I_k$ et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\Delta t p_k \leqslant T \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\Delta t p_k$$

4. En déduire que

$$T = \int_0^\theta q(t)dt.$$

   et calculer T.

5. Exprimer, au moyen d'une intégrale, la probabilité $f(t)$ pour qu'un appareil donné soit remplacé une fois et une seule au cours de la période $[0, t]$, où $0 \leqslant t \leqslant \theta$.

QUATRIEME PROBLEME

Soit $\mathcal{A}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 et φ l'application de $\mathcal{A}$ dans lui-même définie par :

$$(\varphi P)(x) = P(x-1) + P(x+1) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{A}$.

2. Montrer que φ ne possède qu'une seule valeur propre et donner une base de l'espace propre associé.

3. Soit M la matrice de φ relativement à la base ordonnée $(1, X, X^2)$.

   (a) M est-elle diagonalisable ?

(b) Calculer M^{-1}.

4. (a) Soit P un élément quelconque de $\mathcal{A}$.
Montrer qu'il existe un et un seul élément Q de $\mathcal{A}$ tel que

$$P(x) = Q(x-1) + Q(x+1) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

(b) Déterminer le polynôme Q lorsque

$$P(x) = 12x^2 - 7x + 5$$

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in \mathcal{A}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\varphi^n P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} P(x-n+2k)$$

(préciser $\alpha_{n,k}$)

(b) Déterminer le polynôme R_n tel que :

$$(\varphi^n R_n)(x) = x^2 + 2x + 3$$

FIN