ISG 1983 épreuve commune Math II

NOTATIONS

$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}_+^\times =]0, +\infty[$

$\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^\times$

E désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ tels que l'intégrale $\int_0^1 tf(t)dt$ soit convergente

On rappelle que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des espaces vectoriels réels pour l'addition des fonctions réelles et leurs multiplication par les nombres réels. Pour les mêmes lois, il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

La fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^\times$ est notée ω.

ln désigne la fonction logarithme népérien

A

1. Pour tout réel α, on note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
   A quelle condition a-t-on $f_\alpha \in E$?

2. Pour tout entier naturel non nul n, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par $h_n(x) = (\ln x)^n$. On pose en outre $h_n(x) = 1$
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n \in E$.

3. Pour tout réel strictement positif x et tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x uh_n(u)du.$$

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^p} A_n^p h_{n-p}(x)$$

4. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 \left|\ln x\right|^{3/2}}$ si $x \in]0, \dfrac{1}{e}]$ et $\forall x > \dfrac{1}{e}, \quad f(x) = e^2$.

   (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x}$.

   Montrer que f et g sont des éléments de E.

B

A tout élément f de E, on associe la fonction notée Lf définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

$$(Lf)(x) = f(x) - \frac{2}{x^2} \int_0^x tf(t)dt.$$

1. Montrer que l'on définit, en posant $L(f) = LF$, une application linéaire L de E dans $\mathcal{C}$.

2. En utilisant la fonction f (partie **A**, 4a), montrer que E n'est pas stable par L ($L(E) \not\subset E$).

3. On note E' l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}$ pour lesquels il existe un réel $\alpha < 2$ tel que $t^\alpha f(t)$ ait une limite finie à droite en zéro :

   (a) Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E;

   (b) Montrer que E' est stable par L
   La relation : $\forall f \in E, \quad \overline{L}(f) = Lf$ définit donc un endomorphisme de E';

   (c) On considère la fonction g (partie **A**, 4b). Montrer que g n'est pas élément de E', mais que $L(g) \in E$;

4. (a) Montrer que tout élément du noyau de L est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   Quel est ce noyau ?
   Qu'en déduit-on pour L ? pour $\overline{L}$?

   (b) Résoudre dans E : $L(f) = f_{-2}$. Conclusion ?

5. (a) Soit $u \in \mathcal{D} \cap E$. Montrer que :

$$L(f) = u \Rightarrow f \in E \cap \mathcal{D} \text{ et } \forall x > 0, \quad f'(x) = 2\frac{u(x)}{x} + u'(x)$$

   (b) Etudier la réciproque. Modifier l'énoncé de 5a pour qu'il y ait équivalence.

   (c) Résoudre l'équation $L(f) = h_p$ (p entier naturel fixé)

6. Pour tout réel λ, on pose $E_\lambda = \{f \in E \text{ tel que } L(f) = \lambda f\}$

   (a) Déterminer E_1. Dans la suite, on suppose $\lambda \neq 1$;

   (b) Montrer que $f \in E_\lambda \Rightarrow f \in E \cap \mathcal{D}$ et $\forall x > 0, \quad \dfrac{\lambda - 1}{2} x f'(x) + \lambda f(x) = 0$;

   (c) Déterminer le réel α tel que $f_\alpha \in E_\lambda$;

   (d) Etablir les résultats suivants :

      i. $E_\lambda \neq \{\omega\} \Leftrightarrow \lambda < 1$.

      ii. $\forall \lambda < 1, \quad f \in E_\lambda \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $f = k f_{\frac{2\lambda}{1-\lambda}}$

      iii. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad E_\lambda \subset E'$. En déduire qu'en 6b, il y a équivalence.

   (e) Conclure.

7. Soit F_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré $p \leqslant n$.

   (a) Montrer que F_n est stable par L et donner la matrice de la restriction de L à F_n dans la base $(1, x, .., x^n)$;

   (b) Résoudre $L(f) = 1 + x + \cdots + x^n$.

C

Pour tout entie naturel n, on désigne par G_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions :

$$(h_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}.$$

1. Montrer que $(h_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est une base de G_n.

2. Montrer que l'on définit un endomorphisme L_n de G_n en posant :

$$\forall f \in G_n, \quad L_n(f) = Lf.$$

   En donnant la matrice dans la base précédente.

3. On pose $L_n^0 = I_n$ (application identique de G_n) et :

$$\forall p \geqslant 1, \quad L_n^p = L_n \circ L_n^{p-1}.$$

   (a) Montrer que $L_n^{n+1} = 0$;

   (b) En déduire que $(I_n - L_n)$ est inversible et donner son inverse Φ_n en fonction de L_n;

   (c) En utilisant 2 et 3b, résoudre dans G_n : $(I_n - L_n)(f) = h_2$;

   (d) Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

4. Donner la matrice de Φ_n dans la base $(h_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$.

FIN