ISG 1986 Option générale Math I

AVERTISSEMENT

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants. Le barème adopté suivra sensiblement la proportion suivante : 13 points pour le problème I et 7 points pour le problème II

PROBLEME I

r est un paramètre réel non nul

- Dans toute la suite du problème f_r désigne la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_r(0) = f_r(-1) = 0$$

et, pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, par : $f_r(x) = x \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|^r$.

- (C_r) désignera la représentation graphique de f_r dans un repère orthonormé.

1. Faire l'étude de f_r et tracer la représentation graphique dans le cas $r = 1$

Désormais r sera différent de 1 (et de 0)

2. Etude en 0
   (a) f_r a-t-elle une limite en 0 ?
   (b) Pour quelles valeurs de r, f_r est-elle continue en 0 ?
   (c) Pour quelles valeurs de r, f_r est-elle dérivable en 0 ?
3. Etude en -1
   (a) f_r a-t-elle une limite en -1 ?
   (b) Pour quelles valeurs de r, f_r est-elle continue en -1 ?
   (c) Pour quelles valeurs de r, f_r est-elle dérivable en -1 ?
4. Etude en $+\infty$ ou en $-\infty$
   (a) Ecrire un développement limité à l'ordre 2, selon l'infiniment petit $\dfrac{1}{x}$ de la fonction $(1 + \dfrac{1}{x})^r$.
   (b) En déduire une expression de $f_r(x)$ sous la forme

   $$f_r(x) = a_r x + b_r + e_r(x),$$

   où a_r et b_r désignent deux réels et e_r une fonction qui tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
   (c) En déduire que, quel que soit r, (C_r) admet une asymptote oblique, dont on donnera l'équation et dont on précisera la position relative par rapport à (C_r).

5. Montrer que f_r est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$ et que, sur cet ensemble, $f_r'(x)$ s'écrit :

$$f_r'(x) = \frac{x+1-r}{x}.\Phi(x)\left|1+\frac{1}{x}\right|^{r-1},$$

où Φ est une fonction égale à $+1$ ou -1, que l'on précisera selon les valeurs de x.

6. Dresser le tableau de variations de f_r et tracer la représentation graphique (C_r) correspondante, dans les cas :
   (a) $r = -1$
   (b) $r = \dfrac{1}{2}$
   (c) $r = 2$

7. On considère l'intégrale doublement impropre

$$I(r) = \int_0^{-1} x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{r} dx.$$

Montrer qu'elle est convergente si et seulement si :

$$-1 < r < 2.$$

8. On pose $J_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$ pour n entier strictement positif.
   (a) Justifier l'existence de I_n et, en intégrant par parties, chercher une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}.
   (b) Calculer $I(-\frac{1}{2})$ en effectuant le changement de variable $\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^{-1/2} = u$

PROBLEME II

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, rapporté à une base $B = (e_1, e_2, e_3)$
a désigne un réel non nul et h l'endomorphisme de E, dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A admet 2 valeurs propres distinctes α et β, indépendantes de a. On notera α la plus petite des valeurs propres.

2. Montrer qu'il existe un vecteur propre f_1, associé à la valeur propre β, de la forme

$$f_1 = ue_1 + we_2 + e_3$$

pour deux réels u et v que l'on précisera.

3. Montrer que, pour la valeur propre α, il existe deux vecteurs propres, l'un s'écrivant

$$f_2 = u'e_1 + e_2$$

l'autre s'écrivant

$$f_3 = u"e_2 + e_3$$

pour des réels u' et $u"$ que l'on déterminera.

4. (a) Montrer rapidement que (f_1, f_2, f_3) forme une base B' de E.
   (b) Quelle est la matrice D de h, dans la base B' ?
   (c) Déterminer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3.
5. Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$, D^n.
6. En déduire, pour $n \in \mathbb{Z}$, A^n.
   La méthode est laissée au choix du candidat qui pourra, s'il le désire, calculer $h^n(e_1), ...$ à l'aide de 4c et 5.

La réponse sera donnée clairement en écrivant
très lisiblement, très proprement, et sans ratures,
les 9 éléments de la matrice A^n