ISG 1986 épreuve commune Math II

NOTATIONS

x désigne une variable réelle; n un entier naturel.
Si P est une fonction polynôme, P' et P" désignent, de manière classique, les dérivées premières et secondes.
Les candidats pourront utiliser les résultats du préliminaire, dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas établis.
Les parties I et II sont indépendantes.

PRELIMINAIRES

1. Discuter, suivant les valeurs de x, l'existence d'une limite, quand n tend vers $+\infty$, pour les suites de terme général :
$$nx^n \text{ et } n^2x^n.$$
2. On considère que les séries de terme général
$$nx^n \text{ et } n^2x^n.$$
Montrer que pour $|x| \geqslant 1$, ces séries divergent.
3. On pose
$$\begin{aligned} Q_n(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ R_n(x) &= x + 2x + \cdots + nx^n \end{aligned}$$
   (a) Etablir une relation simple entre $R_n(x)$ et $Q'_n(x)$.
   (b) En déduire que la série de terme général nx^n converge pour $|x| < 1$ et établir que sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$ a pour valeur $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
4. On pose $T_n(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$.
   (a) En remarquant que : $\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad p^2 = p(p-1) + p$, écrire $T_n(x)$ à l'aide de Q_n"(x) et $R_n(x)$.
   (b) En déduire que, pour $|x| < 1$, la série de terme général n^2x^n est convergente et que sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$ vaut $\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.
5. Soit une suite numérique (u_n) définie par :
   - le premier terme u_1
   - et pour tout $n \geqslant 1$, la relation
   $$u_{n+1} = au_n + b,$$
   où a est un réel différent de 0 et de 1, et b un réel quelconque.

   (a) Montrer qu'il existe α tel que la suite $(u_n - \alpha)$ soit géométrique.
   (b) Donner la valeur de u_n en fonction de u_1, a, b et n.

CONDITIONS VALANT POUR LES PARTIES I ET II

Une urne est composée de N boules ($N \geqslant 2$), de couleurs toutes différentes.
On effectue dans cette urne, une "série de tirages" AVEC REMISE de telle sorte que la composition de l'urne reste fixe et qu'à chaque tirage la probabilité de tirer une boule de couleur donnée est $\frac{1}{N}$.

PARTIE I

Dans cette partie $N = 3$. Les couleurs des boules seront BLANC, NOIR, ROUGE.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées, quand pour la première fois, 2 couleurs exactement ont été tirées.
On appelle Z la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées, quand pour la première fois, 3 couleurs exactement ont été tirées.

EXEMPLE

Si les tirages donnent successivement : BLANC, BLANC, BLANC, ROUGE alors $Y = 4$
Si les tirages donnent successivement : BLANC, ROUGE, ROUGE, BLANC, NOIR alors $Y = 2$ et $Z = 3$

1. Donner la loi de Y.
2. m et k désignent deux entiers naturels non nuls.
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement ($Z = m$ et $Y = k$).
   On précisera les choix de m et k pour lesquels cette probabilité est non nulle.
   (b) En déduire que la loi de Z est donnée par :
   $$\begin{aligned} m &\leqslant 2 : P(Z=m) = 0 \\ m &\geqslant 3 : P(Z=m) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} - \frac{2}{3^{m-1}}. \end{aligned}$$
3. Calculer $E(Z)$, $E(Z')$, $VZ)$.

PARTIE II

Dans cette partie, on effectue une suite de n tirages, dans les conditions déjà précisées. N est quelconque ($N \geqslant 2$).
X_n est la variable aléatoire égale au nombre de couleurs (différentes) obtenues au cours des n tirages.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$p(n,0) = 0 \text{ et } p(n,k) = P(X_n = k = \text{ si } k \geqslant 1.$$

1. Que dire de $p(n,k)$ si $k > n$? si $k > N$?
2. Calculer $p(n,1)$ et $p(n,n)$.
3. Etablir, pour $1 \leqslant k \leqslant N$, la relation :
   $$p(n+1,k) = \frac{k}{N}p(n,k) + \frac{N-k+1}{N}p(n,k-1)$$
   On pourra examiner les cas suivants : $k \leqslant n$; $\quad k = n+1$; $\quad k > n+1$
4. On introduit (pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$) le polynôme $P_n(X)$ défini par :
   $$P_n(X) = \sum_{k=0}^{N} p(n,k)X^k$$

(a) Que représente $P'_n(1)$ pour la variable aléatoire X_n ?

(b) Etablir :

$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{N}(X - X^2)P'_n(X) + XP_n(X).$$

(c) Trouver une relation simple entre $P'_{n+1}(1)$ et $P'_n(1)$.

(d) Calculer $E(X_n)$ en fonction de N et n. On pourra se servir du préliminaire, question 5.