ISG 1987 Option économique Math I

L'épreuve se compose de 4 exercices indépendants

EXERCICE I

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^{1/x} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

et l'on désigne par (C) sa représentation graphique.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Etudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et en déduire la forme de la branche infinie correspondante pour (C).
4. Montrer que pour $x > 0$ f est dérivable. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.
5. Récapituler les résultats obtenus dans un tableau et tracer avec soin, la représentation graphique (C) dans un repère orthonormée dont l'unité sera prise égale à 5 cm.
6. Etudier le signe de $f(x) - x$.
7. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_n strictement positif, et par la relation de récurrence :

   $$n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

   En supposant que cette suite est convergente, quelles sont ses limites éventuelles ?
8. Etudier la monotonie de cette suite, ainsi que la place de ses termes par rapport à 1 et conclure sur sa convergence éventuelle. On envisagera les trois cas : $u_0 = 1$, $u_0 > 1$, $u_0 < 1$ et l'on se servira des résultats obtenus aux questions 6 et 7.

EXERCICE II

On pose $A = \int_0^x e^t \cos 2t dt$ et $B = \int_0^x e^t \sin 2t dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer deux relations entre A et B. En déduire A et B.
2. Soit alors $I = \int_0^x e^t \sin^2 t dt$ et $J = \int_0^x e^t \cos^2 t dt$.
   Calculer $I + J$, $J - I$ et en déduire I et J.

EXERCICE III

Justifier la convergence des deux intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

EXERCICE IV

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0, \quad u_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

   (a) On pose $u_n = (-1)^n v_n$. Montrer que $v_n - v_{n-1}$ est géométrique. En déduire $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.

   (b) Calculer v_n, puis u_n en fonction de n.

2. Soit A la matrice carrée d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et I la matrice unité d'ordre 3.

   (a) Calculer A^2 puis montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I.

   (b) Montrer que A est inversible et que A^{-1} est combinaison linéaire des matrices A et I. Ecrire la matrice A^{-1}.

   (c) Montrer qu'il existe 2 suites réelles (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I.$$

   Que valent a_0, b_0, a_1, b_1 ?

   (d) Trouver une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite (a_n) et déterminer a_n puis b_n en fonction de n.

   (e) Ecrire très nettement la matrice A^n.