ISG 1987 Option générale Math I

PREMIERE PARTIE

k étant un réel positif, on considère la famille de fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x > 0, \qquad f_k(x) = x^k e^{-x}$$
$$\text{et } f_k(0) = 0 \text{ si } k > 0 \text{ et } f_0(0) = 1$$

La représentation graphique de f_k sera notée (C_k)

1. Etude locale en 0
   (a) f_k est-elle continue en 0 ?
   (b) f_k est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Préciser la forme de C_k au voisinage du point d'abscisse nulle.
2. Etude des intervalles de monotonie de f_k.
   (a) Montrer que, pour $x > 0$, f_k est dérivable et étudier le signe de f'_k.
   (b) Montrer que f_k admet un extremum; on notera M_k le point correspondant de (C_k).
3. Etude au voisinage de $+\infty$
   Etudier la limite de f_k lorsque x tend vers $+\infty$; conclure sur la forme de la branche infinie correspondante pour (C_k).
4. Etudes complémentaires.
   (a) Quel est l'ensemble (L) des points M_k lorsque k parcourt $\mathbb{R}_+$?
   (b) Montrer que, pour $k > 1$, (C_k) admet deux points d'inflexion et que, pour $0 \leqslant k \leqslant 1$, (C_k) admet un point d'inflexion.
   (c) Etudier pour $0 \leqslant k < m$, le signe de $f_m(x) - f_k(x)$ selon les valeurs de x et en déduire la position relative de (C_m) et (C_k).
5. Représentation graphique
   On prend un repère orthonormé : l'unité est de 5 cm.
   (a) Calculer à 10^{-1} près les coordonnées de M_0, $M_{1/2}$, M_1, M_2
   (b) Représenter sur un même dessin (L), (C_0), $(C_{1/2})$, (C_1), (C_2).

   Les candidats veilleront particulièrement au soin et à l'exactitude du dessin compte-tenu des renseignements obtenus dans les questions précédentes

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, k est un entier naturel.
E désigne l'espace vectoriel des fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur à 2. A tout polynôme p défini par :

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

l'on associe la matrice unicolonne P telle que $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ des composantes de p dans la base canonique de E.

1. Montrer que, quel que soit le polynôme p, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} p(t)e^{-t}dt$ est convergente.

2. On pose alors, pour tout k, $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.
   Trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k+1}. En déduire I_k.

3. A tout polynôme p de E, on associe la fonction r définie par :

$$r(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2)e^{-t}p(t)dt.$$

   L'application $p \mapsto r$ est visiblement un endomorphisme de E.
   Quelle est la matrice A de cet endomorphisme dans la base canonique de E ?

4. Chercher les valeurs propres de A et, pour chacune d'elles, préciser les polynômes constituant l'espace propre associé.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, k est toujour entier, mais appartient à l'ensemble des entiers $\{0, 1, 2\}$
On donne une constante a réelle non nulle et une fonction q, continue sur $\mathbb{R}$, telle que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} q(t)dt$$

soient convergentes.
On se propose de chercher les fonctions f vérifiant le système (S) de conditions suivantes :

$i)$ f est continue sur $\mathbb{R}$,

$ii)$ Quel que soit k, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} f(t)dt$ converge.

$iii)$ Pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $f(x) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}(t^2 - 4xt - 2x^2)e^{-t}f(t)dt + q(x)$.

1. On suppose dans cette question que q est la fonction nulle.

   (a) Montrer que, si f est solution de (S), f est nécessairement un élément de E.

   (b) Résoudre (S) à l'aide de la partie II.

   On revient au cas général où q vérifie les conditions du préambule

2. Si f vérifie (S), quel système (S') vérifie la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f = q + g$?

3. Montrer que si g est solution de (S'), g est nécessairement un élément de E, dont on notera G la matrice unicolonne dans la base canonique de E.

4. Montrer qu'alors G vérifie

$$AG - aG = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

   où y_0, y_1, y_2 sont 3 valeurs données par des intégrales impropres convergentes dépendant de la fonction q.

5. Pour quelles valeurs de a, le système (S') puis le système (S) ont-il une solution unique ?

6. Pour b réel, on pose $q(x) = e^{-bx}$. Pour quelles valeurs de b la fonction q satisfait-elle aux conditions du préambule ?
   Résoudre alors le système (S) dans le cas $a = -2$. On discutera selon les valeurs de b.