ISG 1988 Option économique Math I

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants

EXERCICE I

p désigne un entier naturel non nul; a un réel strictement positif.

1. En étudiant, sur $]0, +\infty[$ la fonction θ définie par

$$\theta(t) = (p-1)t + \frac{a^p}{t^{p-1}},$$

   démontrer l'inégalité

$$(1) : \forall t > 0, \quad (p-1)t + \frac{a^p}{t^{p-1}} \geqslant pa$$

2. On désigne par x le p-uplet $(x_1, .., x_p)$ de réels strictement positifs, puis on définit $m_1(x), m_2(x), m_3(x)$ par

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_p}{p} \\ m_2(x) &= \sqrt[p]{x_1 x_2 \cdots x_p} \\ \frac{1}{m_3(x)} &= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_p}\right] \end{aligned}$$

   (a) Etablir par récurrence sur p, et à l'aide de l'inégalité (1), que $m_2(x) \leqslant m_1(x)$. On supposera la propriété vraie pour $p-1$ et l'on utilisera l'inégalité (1) en posant

$$t = \sqrt[p-1]{x_1 x_2 \cdots x_{p-1}}$$

   (b) En déduire : $m_3(x) \leqslant m_2(x) \leqslant m_1(x)$.

3. On définit 3 suites de réels strictement positifs (u_n), $(v_n)_n$, (w_n) par :

$$\begin{aligned} &i) \quad 0 < w_0 \leqslant v_0 \leqslant u_0 \text{ et} \\ &ii) \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}, \quad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}, \quad \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right] \end{aligned}$$

   (a) Montrer que $0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n$.

   (b) Montrer que : (u_n) est décroissante, (w_n) croissante.
   En déduire que (u_n) et (w_n) convergent.

   (c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} - w_{n+1}) \leqslant \dfrac{2}{3}(u_n - w_n)$.

   (d) En déduire que (u_n), (v_n), (w_n) convergent vers la même limite.

EXERCICE II

1. Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

2. Montrer que l'on peut trouver a et b tels que la fonction g définie par :

$$g(0) = a \qquad g(1) = b$$
$$g(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

soit continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

4. On pose, pour $h \neq 0$,

$$\theta(h) = \frac{g(1+h) - g(1)}{h}.$$

A l'aide d'un développement limité, à un ordre que l'on précisera, de la fonction $\ln(1+h)$, montrer que la fonction θ a une limite quand h tend vers 0. Que peut-on en déduire pour la fonction g ?

5. Etudier et représenter graphiquement la fonction g.

EXERCICE III

1. k étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f(t) = ke^{-kt} \text{ si } t \geqslant 0.$$

Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X absolument continue.

2. Quelle est la fonction F de répartition de X ?

3. Justifier l'existence et calculer l'espérance et la variance de X.

4. La durée T, en minutes, d'une communication téléphonique urbaine suit une loi de densité de probabilité f, c'est-à-dire que :

$$P(T \leqslant t) = F(t).$$

   (a) Calculer pour $k = 0,8$ la probabilité pour qu'une communication dure plus de quatre minutes.

   (b) Calculer pour $k = 0,8$ la probabilité pour qu'une communication dure entre 3 et 5 minutes.

   (c) Quelle valeur faut-il donner à k pour que la probabilité qu'une communication soit supérieure à 3 minutes, soit égale à $\frac{1}{10}$.