ISG 1988 épreuve commune Math II

AVERTISSEMENT

On rappelle aux candidats les termes du programme concernant la réduction des endomorphismes et des matrices carrées en algèbre linéaire, en vigueur pour l'année 1987-88 :

> La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres s'effectue, par résolution sur chaque exemple, des équations $u(x) = \alpha x$ ou $A(X) = \alpha X$; la notion de polynôme caractéritique n'est pas au programme

On se propose dans les parties I et II, d'effectuer de telles recherches en tirant le meilleur partie des singularités rencontrées.
Enfin, dans la partie III, après avoir étendu les notions de valeur propre et de vecteur propre à un endomorphisme d'espace vectoriel de fonctions, on guide les recherches de tels éléments dans l'exemple donné

NOTATIONS

Pour n entier naturel ($n = 3$ ou $n = 4$ dans le problème), on désigne par B_n la base canonique de $\mathbb{R}^n.B_n = (e_1, e_2, ..., e_n)$.
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées à éléments dans $\mathbb{R}$.
A un endomorphime u de $\mathbb{R}^n$, on associe sa matrice A dans B_n.
On dit que u (et donc A) est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de u.
Enfin pour unifier les notations :

- dans le cas $n = 3$, on écrira (x, y, z) les composantes d'un vecteur propre dans $\mathbb{R}^n$
- dans le cas $n = 4$, on écrira (x, y, z, t) les composantes d'un vecteur propre dans $\mathbb{R}^n$.

PARTIE I : CALCUL PAR RESOLUTION DE SYSTEME

- - - - - - A - - - - -

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base B_4 s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le système qui permet de déterminer les vecteurs propres de u associés à une valeur propre α.
2. Résoudre ce système et montrer qu'il existe 4 valeurs propres distinctes pour chacune d'elles, on caractérisera les vecteurs propres par leurs composantes dans B_4.
3. u est-il diagonalisable ?

- - - - - - B - - - - -

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B_3 est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le système qui permet de calculer les vecteurs propres de u, associés à une valeur propre α. Résoudre ce système (en discutant selon les valeurs de k) dans le cas $\alpha = 2$.

2. Discuter selon les valeurs de k, l'existence de valeurs propres réelles, distinctes de 2, et, le cas échéant, déterminer soigneusement les vecteurs propres correspondants.

3. Présenter les résultats obtenus en discutant selon les valeurs de k. On séparera les cas $k > 0$, $k = 0$, $k < 0$.

4. Pour quelles valeurs de k, u est-il diagonalisable ?

PARTIE II : UTILISATION DU RANG ET DU NOYAU DE u

- - - - - - A - - - - -

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice A dans la bas B_4 est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ?
   En déduire la dimension du noyau de u ($\ker u$). Donner, sans calculs, à l'aide des vecteurs de B_4, une base de ce noyau. Interprétez ce résultat en termes de valeurs propres et de vecteurs propres.

2. Ecrire le système donnant les composantes des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle α de u. Le résoudre et montrer en particulier qu'il existes deux valeurs propres non nulles, pour lesquelles, on donnera les composantes de vecteurs propres correspondants.

3. u est-il diagonalisable ?

- - - - - - B - - - - -

Soient a, b, c trois réels tels que : $a^2 + b^2 + c^2 = k$ avec $k \neq 0$.
u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B_3 est

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ?

2. Déterminer le noyau et l'image de u. Donner une base du noyau et de l'image.

3. Montrer qu'il existe une valeur propre non nulle. Quels sont les vecteurs propres correspondants ?

4. u est-il diagonalisable ?

PARTIE III : ETUDE D'UN ENDOMORPHISME DE FONCTIONS

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I = [0, +\infty[$ et par u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $u(f) = g$ définie sur I par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = f(0).$$

1. Montrre que g est continue sur $]0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$
   En déduire que u est un endomorphisme de E.

2. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

3. S'il existe α réel et $f \in E$, non nulle, tels que $u(f) = \alpha f$, on dira que f est un vecteur propre de u associé à la valeur propre α.
   Montrer que 0 n'est pas valeur propre de u.

4. Soit α une valeur propre non nulle de u et $f \in E$ un vecteur propre associé.

   (a) Montrer que f est nécessairement dérivable sur $]0, +\infty[$ et trouver une relation entre k' et k, k désignant la restriction de f à $]0, +\infty[$ et k' la fonction dérivée de k sur $]0, +\infty[$.

   (b) En posant $h(x) = x^{1-1/\alpha} k(x)$, montrer que h est nécessairement constante sur $]0, +\infty[$.

   (c) A quelle condition nécessaire sur α, k est-elle effectivement la restriction d'une fonction f, continue sur I.

   (d) Conclure en donnant les valeurs propres de u et pour chacune d'elles les vecteurs propres associés.