ISG 1989 Option économique Math I

L'épreuve se compose de quatre problèmes indépendants que les candidats traiteront dans l'ordre de leur choix

PROBLEME I

Pour n entier naturel non nul, on définit la suite (S_n) par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \cdots + \frac{1}{n^{1/3}}.$$

1. Justifier pour k entier naturel non nul, l'encadrement

$$\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leqslant \frac{1}{k^{1/3}}$$

2. En déduire l'encadrement

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n} \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$$

3. Que peut-on en déduire de la suite S_n ?
4. A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \cdots + \frac{1}{n^{4/3}}$$

est convergente.

PROBLEME II

1. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

   Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier et représenter graphiquement la fonction f.
   L'on justifiera :
   - l'étude du signe de $f'(x)$
   - la forme des branches infinies
3. Montrer que l'aire comprise entre la représentation graphique précédente et ses asymptotes est finie.
   On ne demande pas le calcul de cette aire.
4. (a) Montrer que, pour $u > 0$, les intégrales

$$J_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} - 1} dx \text{ et } K_u = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} + 1} dx$$

   sont convergentes.

   (b) Calculer J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1.

   (c) Etablir $J_1 - K_1 = 2J_2$.

   (d) Déduire de ce qui précède une relation simple entre J_1 et K_1.

PARTIE III

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de probabilité

$$\text{pour } i = 1, 2 \quad P(X_i = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(X_i = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_i = 2) = \frac{1}{2}$$

On définit les nouvelles variables aléatoires $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1 X_2$

1. Déterminer la loi du couple (S, P)
2. Déterminer les lois marginales de S et P
   Les variables aléatoires S et P sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$, $V(P)$, $cov(S, P)$

PROBLEME IV

On admettra que pour $|x| < 1$ et $k \in \mathbb{N}^{\times}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (1 - a)a^n$$

   (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Une urne contient des boules blanches et boules noires dans les proportions p et q, $p + q = 1$.
   On effectue des tirages avec remise. Le nombre de tirages suit la loi de X.
   Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Calculer pour tout entier k et n, la probabilité conditionnelle $P(Y = k/X = n)$ ainsi que $P(Y = k \cap X = n)$.
   (b) En déduire la loi de Y et calculer l'espérance de Y.