ISG 1989 Option générale Math I

L'épreuve comporte un exercice et un problème

EXERCICE

Une urne comporte b boules blanches et r boules rouges.
On tire les boules une à une, en remettant la boule après tirage si celle-ci est rouge et en ne la remettant pas si celle-ci est blanche.

1. Calculer la probabilité de tirer exactement une blanche en n tirages.
2. Calculer la probabilité de tirer au moins une blanche en n tirages.,
3. Sachant qu'en n tirages on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule blanche ait été tirée en dernier ?

PROBLEME

PARTIE I. PRELIMINAIRES ET RAPPELS

Cette partie ne comporte que deux questions

A. La restriction de la fonction tan à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque, notée arctan, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
La fonction arctan est accessible sur les calculatrices comme fonction inverse de la fonction tan
On veillera à utiliser les radians.

(1) Montrer que arctan est dérivable et que la fonction dérivée est la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) Etablir que : $\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

B. On admettra le résultat suivant :
Si f est une fonction de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et si

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$$

et ceci est valable avec $L \in \overline{\mathbb{R}}$

C. On obtient une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par méthode des trapèzes à l'ordre n, en posant :

$$\text{pour } i \in [\![0,n]\!], \quad x_i = a + i.\frac{b-a}{n}$$

et en prenant comme valeur approchée de l'intégrale :

$$\frac{b-a}{n}.\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

L'objet du problème est l'étude pour q réel strictement positif de la fonction f_q définie par :

$$f_q(x) = \int_0^x \frac{t^2-1}{(t^2+1)^q}dt.$$

On notera (C_q) la représentation graphique de la fonction f_q.

PARTIE II : ETUDE GENERALE

1. Quel est l'ensemble de définition de f_q ?
   Etudier la parité de f_q.

2. Etudier le sens de variation de f_q.

3. Quel est, selon les valeurs de q, le nombre de points d'inflexion de la représentation graphique.

4. Pour $q \neq 1$, étudier la forme de branche infinie de (C_q) lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Déduire de ce qui précède l'allure, sous forme d'un schéma rapide, de la partie de C_q correspondant à $x \geqslant 20$ pour :

   - $q \in]0, 1[$
   - $q \in]1, \frac{3}{2}[$
   - $q \in]\frac{3}{2}, +\infty[$

PARTIE III : ETUDE DANS LE CAS $q = 1$

1. En remarquant que $t^2 - 1 = t^2 + 1 - 2$, donner l'expression de f_1 à l'aide de fonctions usuelles.

2. Montrer que (C_1) admet, quand x tend vers $+\infty$, une asymptote que l'on déterminera.

3. Montrer qu'il existe un point unique A, d'abscisse strictement positive α, l'intersection de l'axe Ox et de (C_1), et que $\sqrt{3} < \alpha < 3$.

4. On pose $g(x) = 2 \arctan x$ et l'on définie une suite (x_n) par :

   $$x_0 = 2,37 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]\sqrt{3}, 3[$

5. Etablir que pour $x \in]\sqrt{3}, 3[, \quad 0 < g'(x) < \dfrac{1}{2}$.
   En déduire :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$$

6. (a) En conclure que la suite (x_n) converge vers α.

   (b) Calculer un entier n, que l'on choisira le plus petit possible, tel que :

   $$|x_n - \alpha| \leqslant 10^{-2}.$$

   On pourra remarquer, en le justifiant rapidement, que $|x_0 - \alpha| < 0,64$

   (c) Calculer alors, une valeur approchée à 10^{-2} près, de α.

7. Tracer la partie de (C_1) correspondant à $x \geqslant 0$, avec précision sur une feuille de papier millimétrée. (unité : 3 cm).

PARTIE IV : ETUDE DU CAS OU $q = \frac{3}{2}$

Dans cette question, on pose $h(t) = \dfrac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^{3/2}}$ et, pour simplifier $f(x) = f_{3/2}(x)$

1. Calculer pour i entier, variant de 0 à 34, les valeurs de $h(\frac{i}{10})$.
   Les résultats seront présentés sous forme d'un tableau le plus lisible possible.

2. En appliquant la méthode des trapèzes à h sur $[0, 1]$ pour $n = 10$, donner une valeur approchée de $f(1)$.

3. En utilisant le 1 et la méthode des trapèzes, d'une manière que l'on précisera, donner des valeurs approchées de $f(3,3)$ et $f(3,4)$.
   Que peut-on en conclure ?

4. Tracer avec un maximum de soin, sur la même feuille que (C_1), la partie de courbe $(C_{3/2})$ correspondant à $x \geqslant 0$ (unité 3 cm).