ISG 1989 Epreuve commune Math II

Le sujet comporte trois problèmes indépendants que les candidats traiteront dans l'ordre de leur choix

PROBLEME I

Pour n entier naturel strictement positif, l'on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur à n. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le polynôme $f(P) = Q$ défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + P(X)$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe un polynôme unique que l'on notera E_k, tel que $f(E_k) = X^k$, c'est-à-dire que
$$(i) : E_k(X+1) + E_k(X) = X^k$$
3. Etablir les deux relations suivantes :
$$\begin{aligned} (ii) \quad &: \quad (E_n)'(X) = nE_{n-1}(X) \text{ où } (E_n)' \text{ est le polynôme dérivé de } E_n \\ (iii) \quad &: \quad E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X) \end{aligned}$$
Pour établir cette dernière relation l'on pourra changer X en $(-X)$ dan (i).
4. Montrer que, si n est pair, $E_n(X)$ est divisible par $X(X-1)$ et si n est impair, $E_n(X)$ est divisible par $X - \dfrac{1}{2}$.

PROBLEME II

E et F désignent deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des réels.

1. Dans cette question $E = F = \mathbb{R}^2$, f est un endomorphisme de E défini par sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer par leurs matrices B, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les endomorphismes g de E tels que :
   $$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$
   (b) Comparer les rangs de f et de g.
2. On revient au cas général, f étant une application de E dans F et g une application de F dans E, telles que :
$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$
   (a) Montrer que : $\operatorname{Im} g \cap \ker f = \{0\}$
   (b) Montrer que tout $x \in E$ est de la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} g$ et $x_2 \in \ker f$. L'on pourra remarquer que $g \circ f$ est un projecteur.
   (c) Comparer les rangs de f et de g.

PROBLEME III

n désignant un entier naturel non nul, on considère un espace vectoriel E de dimension $2n+1$ et une base $B = (e_1, e_2, .., e_{2n+1})$ de ce dernier.
u est un endomorphisme de E défini par

$$\begin{array}{ll} u(e_1) & = e_2 \\ u(e_i) & = e_{i+1} + e_{i-1} \quad \text{pour } 1 < i < 2n+1 \\ u(e_{2n+1}) & = e_{2n} \end{array}$$

1. Quelle est la matrice de u dans la base B ?
2. Déterminer une base de B_1 du noyau de u.
   Quel est le rang de u ?
3. Soient $f_1, f_2, ..., f_{2n}$ les éléments de E suivants

$$\begin{array}{rcll} f_i & = & e_{2i} & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \\ f_{n+j} & = & u(e_{2j}) & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}$$

   (a) Montrer que les f_i, $1 \leqslant i \leqslant 2n$ sont des éléments de $\operatorname{Im} u$.
   (b) Montrer que $B_2 = (f_1, f_2, .., f_{2n})$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

4. (a) Montrer que $B' = B_1 \cup B_2$ est une base de E.
   (b) Ecrire avec un maximum de soin et de précision la matrice u dans cette base.
5. Question à traiter sans calculs matriciels.
   (a) Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u et que la restriction de u à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur lui-même.
   (b) En déduire que la matrice suivante, carrée d'ordre n, est inversible

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$