ISG 1990 Option économique

Le sujet comprend quatre exercices indépendants

EXERCICE I

On considère la suite réelle définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et pour $n \geqslant 2$ par la relation

$$(1) : u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n + u_{n-1})$ est géométrique et exprimer $u_n + u_{n-1}$ en fonction de u_0, u_1 et n.
2. Montrer de même que la suite $(u_n - 2u_{n-1})$ est géométrique et exprimer $u_n - 2u_{n-1}$ en fonction de u_0, u_1 et n.
   En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n.
3. Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer pour tout n entier naturel que A^n est de la forme $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ pour des suites (a_n) et (b_n) qui vérifient (1).
4. En déduire, pour tout entier n, les valeurs de a_n et b_n.

EXERCICE II

On se propose d'étudier l'existence de valeurs et vecteurs propres pour la matrice à éléments réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le système donnant les composantes (x, y, z) des vecteurs propres associés à une valeur propre k de A.
2. Montrer que $k = 0$ est une valeur propre et que l'espace propre associé est de dimension 1. En donner une base.
3. On cherche maintenant s'il existe une valeur propre $k \neq 0$. Montrer qu'alors nécessairement $z \neq 0$ et que k est solution d'une équation du second degré ayant 2 racines distinctes.
4. Prouver alors que les deux valeurs trouvées sont effectivement valeurs propres en donnant pour chacune d'elle un vecteur propre associé.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

EXERCICE III

Pour $x > -1$, on définie f par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour } x \neq 0 \text{ par } : x^2 f(x) = x - \ln(1+x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
2. Donner, en les justifiant, les limites de f en -1 et en $+\infty$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

   (b) Calculer alors la valeur de $f'(x)$ et la mettre sous la forme $\dfrac{g(x)}{x^3}$.

   (c) Montrer que f est dérivable en 0.
4. Dériver g et montrer, que pour tout $x > -1$ et $x \neq 0$, $g(x) < 0$.
5. Dresser le tableau de variations de f et en donner une représentation graphique avec une unité de 5 cm.
6. Calculer, pour $x > 0$, une primitive de f.

EXERCICE IV

QUESTION PRELIMINAIRE (utile dans la dernière question de l'exercice)

On admettra que, pour $|x| < 1$:

- la série de terme général nx^n converge et a pour somme $\dfrac{x}{(1-x)^2}$
- la série de terme général n^2x^n converge et a pour somme $\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

Soit a un réel de $]0, 1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (1-a)a^n$.

a) Calculer l'espérance de X.

b) Calculer l'espérance de X^2.

c) Calculer la variance de X.

EXERCICE

Un joueur décide d'effectuer une partie de PILE ou FACE avec les règles suivantes

- il a gagné dès que PILE est sorti 2 fois de plus que FACE
- il a perdu dès que FACE est sorti 2 fois de plus que PILE
- la parie n'est interrompue que lorsqu'une des deux éventualités précédentes s'est réalisée.

La pièce est dissymétrique : la probabilité d'obtenir PILE à chaque jet est p $(0 < p < 1)$, celle de FACE est $q = 1 - p$.

1. Soit n un entier naturel. Montrer que la probabilité pour que la partie contienne plus de $2n$ jets de pièce est α avec $\alpha = 2pq$.

2. Soit U la probabilité que le joueur gagne la partie et V la probabilité qu'il la perde.
Montrer que
$$U = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \quad \text{et} \quad V = q^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$$
Calculer U et V.

3. Soit Y la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de jets contenus dans la partie.
   (a) Montrer que Y ne peut prendre que des valeurs paires supérieures ou égales à 2.
   (b) Calculer pour $n > 0$, $P(Y = 2n)$ en fonction de α (on remarquera que $(p+q)^2 = 1$)
   (c) En appliquant la question préliminaire à $\dfrac{Y}{2} - 1$, calculer l'espérance et la variance de Y.