ISG 1990 Option générale

Le sujet comprend trois problèmes indépendants

PROBLEME I

On se propose d'étudier l'existence des valeurs et vecteurs propres pour la matrice à éléments réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$$

avec $c \neq 0$.

1. Ecrire le système donnant les composantes (x, y, z, t) des vecteurs propres associés à une valeur propre k de A.
2. Montrer que $k = 0$ est une valeur propre et que l'espace propre associé est de dimension 2. En donner une base (e_1, e_2) où e_1 et e_2 ont respectivement la première et la deuxième composante nulle.
3. On cherche maintenant s'il existe une valeur propre $k \neq 0$. Montrer qu'alors nécessairement $t \neq 0$ et que k est solution d'une équation du second degré ayant 2 racines distinctes.
4. Prouver alors que les deux valeurs trouvées sont effectivement valeurs propres en donnant pour chacune d'elle un vecteur propre associé e_3 et e_4.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?
   GENERALISATION
6. En recherchant de la même façon valeurs et vecteurs propres, étudier si la matrice réelle carrée d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   avec $a_{n-1} \neq 0$, est diagonalisable.

PROBLEME II

1. Etudier et représenter graphiquement la fonction définie par :

$$2 \ln |x| + \frac{1}{x} - x,$$

   où ln désigne la fonction logarithme népérien.
2. Montrer que quel que soit $x \in]0, 1[\, : \, 0 \leqslant \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   Dans la suite du problème α désigne un réel strictement positif

3. On considère la fonction g_α définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g_\alpha(0) = 0 \text{ et si } x > 0, \quad g_\alpha(x) = x^\alpha \ln x.$$

   (a) Calculer pour $a > 0$: $\int_a^1 g_\alpha(t)dt$.

   (b) En déduire $\int_0^1 g_\alpha(t)dt$.

4. (a) Pour quelles valeurs de c et d la fonction f_α définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_\alpha(0) = c, \quad f_\alpha(1) = d \text{ et pour } 0 < x < 1 \text{ par } f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1}$$

   est-elle continue sur $[0, 1]$?

   (b) Etudier la dérivabilité de f_α.

5. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1} dx.$$

   Calculer $I_n - I_{n-1}$.

6. En remarquant que

$$I_n = \int_0^1 x^{2n} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} dx$$

   donner une majoration de I_n et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

7. Ecrire I_0 à l'aide de I_n et de $S_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$.

8. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de I_0.

PROBLEME III

NOTATIONS

Dans tout le problème, on désignera par α une constante réelle strictement positive, par n un entier naturel *non nul* et par k un entier naturel.
X_n sera une variable aléatoire suivant **la loi de Poisson** de paramètre $n\alpha$; u_n désignera la probabilité pour que l'on ait $(X_\alpha \leqslant n)$: $u_n = P(X_n \leqslant n)$.
On admettra que la suite (s_n) définie par :

$$s_n = (n+1)e^{-n\alpha} \frac{(n\alpha)^n}{n!}$$

a pour limite 0.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

1. Quelle est la loi de X_n, c'est-à-dire, pour tout entier k, la valeur de $P(X_n = k)$?

2. Pour une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre μ ($\mu > 0$) montrer que le maximum de $p_k = P(Y = k)$ est obtenu pour $k = E(\mu)$ partie entière de μ.

3. On pose pour tout x positif :

$$J_k(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x e^{-t}t^k dt.$$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $J_k(x)$ et $J_{k+1}(x)$. En déduire une expression explicite de $J_k(x)$.

   (b) On pose

$$I_k = \frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt.$$

   Montrer que l'intégrale a un sens et que $I_k = 1$.

   (c) Ecrire u_n sous la forme d'une somme. En déduire

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_{n\alpha}^{+\infty} e^{-t}t^n dt.$$

ETUDE DU CAS $\alpha > 1$

4. Etablir à l'aide de 2 que la suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $q_k = P(X_n = k)$ est croissante sur $[\![0, n]\!]$.
En déduire que : $u_n \leqslant s_n$ et que la suite (u_n) converge.

ETUDE DU CAS $0 < \alpha < 1$

5. Etablir que :

$$P(X_n > n) = \frac{(n\alpha)^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{-n\alpha t}t^n dt$$

6. Vérifier, en étudiant la fonction $t \mapsto e^{-n\alpha t}t^n$ sur $[0, 1]$, que :

$$0 \leqslant \int_0^1 e^{-n\alpha t}t^n dt \leqslant e^{-n\alpha}.$$

En déduire l'existence d'une limite pour la suite (u_n). Quelle est la limite ?