ISG 1990 Option technologique

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = xe^{-x} + e$$

2. Etudier et représenter graphiquement la fonction g définie par :

$$g(x) = -e^{-x} + e \ln |x|$$

   où ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2

On désigne par A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n désignant désormais un entier naturel non nul.

1. On pose $A = I + B$, où B désigne la matrice unité d'ordre 3. Calculer B^3 et montrer que l'on a $A^3 = 3A^2 - 3A$.
2. (a) Démontrer l'existence et l'unicité de 2 suites (x_n) et (y_n) telles que, pour tout entier n non nul, l'on ait :

$$A^n = x_n A^2 + y_n A.$$

   (b) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

   (c) Donner un tableau des valeurs numériques de x_n et y_n pour $n \leqslant 8$.
3. Comparer A^7 et A et d'une manière plus générale A^{n+6} et A^n.

EXERCICE 3

a désigne un réel de $]0, 1[$. On admettra :

- que la série de terme général na^n converge et a pour somme $\dfrac{a}{(1-a)^2}$.
- que la série de terme général $n^2 a_n$ converge et a pour somme $\dfrac{a(a+1)}{(1-a)^3}$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ dont la loi est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (1-a)a^n$$

   (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion p et q $(p+q=1)$
On effectue des tirages avec remise
Le nombre de tirages effectués est une variable aléatoire ayant la même loi que X. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

2. Calculer $P(Y=k/X=n)$ et $P(Y=k\cap X=n)$.

3. En déduire la loi de Y. Pour cette dernière question, on admettra que pour $|b|<1$ et pour tout entier k, que la série de terme général :
$$\frac{(n+k)!}{k!n!}b^n$$
converge et a pour somme $\dfrac{1}{(1-b)^{k+1}}$