ISG 1991 Option économique

L'épreuve se compose de 3 parties chacune comprenant un ou deux exercices indépendants

PARTIE I : ANALYSE

EXERCICE 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
2. Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour x non nul et définir, pour $x \neq 0$, g par : $g(x) = x^2 f'(x)$.
4. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^\times$ et montrer, en particulier, que g s'annule pour une valeur α que l'on calculera à 10^{-3} près en indiquant soigneusement la méthode adoptée.
5. En déduire le signe de $f'(x)$, le tableau de variations de f.
6. Préciser la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine et tracer la représentation graphique de f.

EXERCICE 2

Pour chaque entier k positif, on définit une application f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}.$$

On note I_k l'intégrale $\int\limits_0^1 f_k(x)dx$.

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est une primitive de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
En déduire la valeur de I_0.
2. Calculer I_1.
3. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la relation :
$$kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$
En déduire I_2 et I_3.
4. Démontrer que
$$I_k \leqslant \frac{1}{k+1}$$
et en déduire la limite de I_k quand k tend vers $+\infty$.

PARTIE II : ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE 1

On considère la matrice réelle d'ordre 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2, M^3.
2. Montrer qu'il existe a et b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.
3. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$M^n = a_n M^2 + b_n M$$
4. En déduire M^6 et M^7. On écrira tous les éléments de ces matrices.

EXERCICE 2

Soit M la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $0, 2, -2, 4, -4$ sont des valeurs propres de M et trouver pour chacune d'elles les vecteurs propres associés.
2. M est-elle diagonalisable ?

PARTIE III : PROBABILITES

EXERCICE 1

Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 :

4 boule portent le numéro 1
4 boules portent le numéro 2
....
4 boules portent le numéro 8

On tire au hasard sans remise un échantillon de 5 boules.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. Quatre boules portant le même numéro et une boule portant un autre numéro ?
2. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?
3. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?
4. Deux boules portant le même numéro et trois boules portant des numéros différents entre eux et différents du premier ?
5. Cinq boules portant des numéros différents ?

Après avoir donné les valeurs exactes, avec leurs justifications, on donnera une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-4} près, dans un tableau récapitulatif.

EXERCICE 2

On donne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t \geqslant 0$, par

$$f(t) = 9te^{-3t}.$$

1. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Démontrer l'existence et calculer la valeur de l'espérance de X.
3. Démontrer l'existence et calculer la variance de X.

FIN