ISG 1991 Option technologique

L'épreuve se compose de 3 parties chacune comprenant un ou deux exercices indépendants.

PARTIE I : ALGEBRE LINEAIRE

On considère la matrigce réelle d'ordre 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2, M^3.
2. Montrer qu'il existe a et b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.
3. Montrer que 0 est valeur propre de M et donner les vecteurs propres associés.
4. Montrer à l'aide de la question 2 que les valeurs propres éventuelles non nulles de la matrice M sont 2 et 5. Montrer alors, par le calcul des vecteurs propres associés, que 2 et 5 sont effectivement valeurs propres.

PARTIE II : ANALYSE

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + x - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = \frac{1}{2}$$

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que g est dérivable en 0.
3. Calculer, pour $x \neq 0$, la dérivée $g'(x)$ et montrer que $g'(x) > 0$.
4. Représenter graphiquement la fonction g.
5. Soit $A(\lambda)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

   $$1 \leqslant x \leqslant A \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant 1.$$

   (a) Prouver, pour $x \geqslant 1, \quad 1 - g(x) \leqslant xe^{-x}$.

   (b) En déduire que $A(\lambda)$ admet une limite quand λ tend vers $+\infty$

PARTIE III : PROBABILITES

EXERCICE 1

Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 :

4 boule portent le numéro 1
4 boules portent le numéro 2
....
4 boules portent le numéro 8

On tire au hasard sans remise un échantillon de 5 boules.

Quelle est la probabilité d'obtenir

1. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant le même numéro différent du précédent ?

2. Deux boules portant le même numéro, deux boules portant le même numéro différent du précédent, et une boule portant un autre numéro ?

Après avoir donnée les justifications nécessaires, l'on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près de ces probabilités.

EXERCICE 2

On donne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t \geqslant 0$, par

$$f(t) = 3e^{-3t}.$$

1. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2. Démontrer l'existence et calculer la valeur de l'espérance de X.

FIN