ISG 2001 Option technologique

Exercice I

Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6
On tire, dans cette urne, simultanément et au hasard 4 boules

- On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand des numéros obtenus sur l'ensemble des 4 boules tirées
- On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le plus petit des numéros obtenus sur l'ensemble des 4 boules tirées

1. (a) Montrer que les valeurs possibles de X sont: $4, 5, 6$, et que celles de Y sont : $1, 2, 3$
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X. Calculer son espérance
   (c) Déterminer la loi du couple (X, Y) (on utilisera un tableau pour représenter les résultats)
   (d) En déduire la loi de la variable aléatoire Y. Calculer son espérance
   (e) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   (f) Déterminer la covariance du couple (X, Y)

2. On remplace les 4 boules blanches tirées précédemment par 4 boules noires On mélange ces 4 boules noires aux 2 boules blanches qui s'y trouvent toujours.

   On tire alors, une à une et sans remise, les boules de l'urne et on arrête dès l'obtention de la $4^{ième}$ boule noire

   (a) On désigne par Z la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués
   Déterminer la loi de Z,que constate-t-on ? - Donner son espérance
   (b) On note T la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués pour obtenir la première boule noire
   Déterminer la loi de T, que constate-t-on ? - Donner son espérance

Exercice 2

1. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x + \left(\frac{1}{e-1}\right) . \exp(x) - \left(\frac{1}{e-1}\right)$$

   (a) Etudier les variations de la fonction f
   (b) En déduire (suivant les valeurs de x) le signe de $f(x)$

2. On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = -x + \exp(x) - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{e-1}\right)$$

   (a) Etudier les variations de la fonction F
   (b) Comparer $F(x)$et $f(x)$

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int\limits_{x}^{x+1} f(t)dt$

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 1

   (a) Démontrer que: $\forall n \geqslant 1, \quad f(n) \leqslant F(n) \leqslant f(n+1)$

   (b) En déduire l'existence d'un unique réel $u_n \in [\![n, n+1]\!]$ tel que $F(n) = f(u_n)$.

   (c) On considère la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1, \quad v_n = u_n - n$

   - montrer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée
   - Etablir que : $\dfrac{\exp(v_n)}{e-1} = 1 - \dfrac{1}{2\exp(n)} + \dfrac{v_n}{\exp(n)}$

   En déduire que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite que, l'on déterminera, lorsque n tend vers plus l'infini